

Московский государственный университет  
имени М.В. Ломоносова  
Физический факультет

Государственный астрономический институт имени  
П.К. Штернберга

**В.Е.Жаров**

# **Основы радиоастрометрии**

Рекомендовано Учебно-Методическим Объединением по  
классическому университетскому образованию РФ  
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных  
заведений, обучающихся по специальности  
011501 — Астрономия

Москва, 2011

УДК 521.2, 523.164

ББК 22.6

Ж 35

## **В.Е. Жаров**

Основы радиоастрометрии. — М.: Физический факультет МГУ, 2011.—280 с.  
ISBN 978-5-8279-0098-6

В учебнике последовательно изложены основы использования радиоинтерферометров со сверхдлинными базами (РСДБ) в астрометрии и геодезии. Подробно рассматривается теория РСДБ, методы редукции астрометрических наблюдений и анализа результатов.

Книга может быть полезна для научных сотрудников, специализирующихся в области астрометрии и радиоастрономии, а также может быть пособием для аспирантов, обучающимся астрономии.

Рецензенты:

д.ф.-м.н., профессор Л.И.Матвеевко (ИКИ РАН)

д.ф.-м.н. С.Ф.Лихачев (АКЦ ФИАН)

ISBN 978-5-8279-0098-6



© В.Е.Жаров

© Физический факультет МГУ  
имени М.В.Ломоносова, 2011 г.

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>6</b>
<b>1 Основные задачи радиоастрометрии</b>	<b>11</b>
1.1 Международная РСДБ служба . . . . .	13
1.2 Краткий исторический обзор . . . . .	19
1.3 Источники и механизмы космического радиоизлучения . . . . .	23
1.3.1 Тепловое излучение . . . . .	26
1.3.2 Поглощение излучения и оптическая толщина . . . . .	28
1.3.3 Тормозное излучение . . . . .	30
1.3.4 Синхротронное излучение . . . . .	32
1.4 Структура квазаров . . . . .	37
1.4.1 Линейные и угловые расстояния в космологии . . . . .	37
1.4.2 Релятивистские эффекты в квазарах . . . . .	41
1.4.3 Механизм генерации джета . . . . .	44
<b>2 Основы радиоастрономии</b>	<b>51</b>
2.1 Основные соотношения . . . . .	51
2.2 Антенная и яркостная температуры . . . . .	59
2.3 Основы радиоинтерферометрии . . . . .	62
2.3.1 Суммирующий радиоинтерферометр . . . . .	65
2.3.2 Корреляционный радиоинтерферометр . . . . .	68
2.3.3 Пространственная когерентность . . . . .	71
2.3.4 Функция видности и распределение интенсивности . . . . .	74
2.3.5 Чувствительность интерферометра . . . . .	81
<b>3 Оборудование радиоинтерферометра со сверхдлинной базой</b>	<b>87</b>
3.1 Малошумящий приемник . . . . .	90
3.2 Гетеродин и фазовая стабильность . . . . .	94
3.3 Системы регистрации . . . . .	100
3.3.1 Канадская аналоговая система регистрации . . . . .	101
3.3.2 Цифровая система регистрации Mark-I . . . . .	102

3.3.3	Цифровая система регистрации Mark-II . . . . .	103
3.3.4	Цифровая система регистрации Mark-III . . . . .	104
3.3.5	Канадская система регистрации S2 . . . . .	105
3.3.6	Японская система регистрации . . . . .	105
3.3.7	Система регистрации VLBA . . . . .	105
3.3.8	Система регистрации Mark-IV . . . . .	106
3.3.9	Интерфейс записи . . . . .	106
3.3.10	Система регистрации Mark 5 . . . . .	106
3.4	Преобразование сигнала в РСДБ . . . . .	107
3.5	Фаза, групповая задержка и частота интерференции . . . . .	110
3.6	Обработка цифровых сигналов . . . . .	120
3.6.1	Корреляция цифровых сигналов . . . . .	120
3.6.2	Простой коррелятор . . . . .	122
3.6.3	Коррелятор с задержкой . . . . .	123
3.6.4	X <sub>F</sub> -коррелятор по схеме «база интерферометра» . . . . .	127
3.6.5	X <sub>F</sub> -коррелятор по схеме «станция интерферометра» . . . . .	129
3.6.6	F <sub>X</sub> -коррелятор по схеме «станция интерферометра» . . . . .	130
3.6.7	DiF <sub>X</sub> -коррелятор . . . . .	131
3.7	Сеть VLBI2010 . . . . .	132
<b>4</b>	<b>Редукция наблюдений</b> . . . . .	<b>140</b>
4.1	Системы координат . . . . .	141
4.1.1	Константы (Стандарты международной службы вращения Земли – IERS Conventions 2003) . . . . .	141
4.1.2	Барицентрическая система координат . . . . .	143
4.1.3	Геоцентрическая система координат ITRF, жестко связанная с Землей . . . . .	145
4.1.4	Приливы и определение земной системы координат . . . . .	148
4.1.5	Геоцентрическая небесная инерциальная система координат GCRS . . . . .	151
4.2	Определения шкал времени . . . . .	153
4.2.1	Преобразование времени . . . . .	156
4.2.2	Классическое преобразование из земной в небесную систему координат . . . . .	158
4.2.3	Концепция «невращающегося начала отсчета» . . . . .	161
4.3	Вычисление задержки . . . . .	164
4.3.1	Основные этапы редукции наблюдений на РСДБ . . . . .	166
4.3.2	Вычисление гравитационной задержки . . . . .	168
4.3.3	Вычисление геометрической задержки . . . . .	168
4.4	Определение опорной точки антенны . . . . .	171

4.5	Приливные и неприливные смещения антенн . . . . .	173
4.5.1	Влияние приливов твердого тела Земли . . . . .	174
4.5.2	Полярный прилив в твердом теле Земли . . . . .	178
4.6	Влияние тропосферы и ионосферы . . . . .	183
4.6.1	Учет структуры источника . . . . .	189
4.7	Вычисление производных задержки по параметрам . . . . .	190
4.7.1	Вычисление частных производных по координатам радиоисточника . . . . .	192
4.7.2	Вычисление частных производных по координатам телескопов . . . . .	194
4.7.3	Вычисление частных производных по координатам полюса . . . . .	195
4.7.4	Вычисление частных производных по всемирному времени . . . . .	197
4.7.5	Вычисление частных производных по нутации в долготе и нутации в наклоне . . . . .	198
4.7.6	Вычисление частных производных по задержке в тропосфере . . . . .	201
4.7.7	Вычисление частных производных по числам Лява . . . . .	202
4.8	Структура пакета АРИАДНА . . . . .	208
4.8.1	Каталоги . . . . .	211
4.8.2	Модуль «Main» . . . . .	217
4.8.3	Подпрограммы пакета АРИАДНА . . . . .	218
<b>5</b>	<b>Решение системы линеаризованных уравнений</b>	<b>225</b>
5.1	Метод наименьших квадратов . . . . .	225
5.1.1	Учет уравнений связи («мягкие условия») . . . . .	229
5.1.2	Ограниченные нормальные уравнения (для SINEX файлов) . . . . .	231
5.1.3	Учет уравнений связи («жесткие условия») . . . . .	233
5.1.4	Уравнения связи . . . . .	236
5.2	Использование фильтра Калмана . . . . .	238
5.2.1	Постановка задачи . . . . .	238
5.2.2	Динамические системы . . . . .	240
5.2.3	Алгоритмы фильтрации . . . . .	243
5.2.4	Применение фильтра Калмана в радиоастрометрии . . . . .	250
	<b>Литература</b>	<b>253</b>
	<b>Предметный указатель</b>	<b>277</b>

# Введение

Термин «радиоастрометрия», как обозначение нового раздела или направления астрометрии, появился в конце 70-х — начале 80-х годов XX века. Возникновение этого направления связано с тем, что на смену классическим оптическим астрометрическим инструментам и традиционным методам обработки наблюдений пришли новые средства. Мы употребили термин «средства», потому что радиоинтерферометры со сверхдлинными базами (РСДБ), глобальные космические навигационные системы (GPS и ГЛОНАСС, в будущем GALILEO), широко применяемые сегодня в астрометрии, геодезии, геодинاميке и навигации, представляют собой именно системы, состоящие из радиотехнических, компьютерных, информационных и других элементов. Информация, которая используется для получения астрометрических данных (координат, скоростей объектов, параметров вращения Земли и т.д.), переносится с помощью радиосигналов. Переход из оптического диапазона в радиодиапазон дал возможность поставить принципиально новые задачи в астрометрии и решить их на качественно новом уровне точности.

Радиоастрометрия опирается на методы радиоастрономии, изложению основ которой посвящены много учебников и монографий (см., например, [12, 18, 4, 30, 228, 16]).

Основными инструментами, которые используются в радиоастрономии и радиоастрометрии, являются радиотелескопы. Мы будем рассматривать радиотелескоп как пассивное устройство, принимающее радиоволны. Их использование никоим образом не мешает другим службам. Наоборот, чрезвычайно малая мощность космического радиоизлучения требует специальных мер по размещению, устройству радиотелескопов. Мощность передатчиков, размещенных на поверхности земли, самолетах, космических аппаратах, значительно превосходит мощность космического радиоизлучения. Поэтому для того, чтобы радиоастрономы могли наблюдать, Международный союз электросвязи (International Telecommunication Union — ITU) выделяет ряд частотных полос, которые не могут быть использованы для передачи радиосигналов государственными, коммерческими и другими организациями. В таблице 1 (Table 3 [117]) приводятся частотные диапазо-

Таблица 1: Частотные диапазоны, отведенные ИТУ для радиоастрономических наблюдений в континууме

Диапазон частот, МГц	Диапазон частот, ГГц
13.360–13.410	10.6–10.7
25.550–25.670	15.35–15.4
37.5–38.25	22.21–22.50
73–74.6	23.6–24.0
150.05–153	31.3–31.8
322–328.6	42.5–43.5
406.1–410	76–116
608–614	
1400–1427	123–158.5
1660–1670	164–167
2655–2700	200–231.5
4800–5000	241–275

ны, отведенные ИТУ для радиоастрономических наблюдений в континууме. Кроме этих диапазонов ИТУ отводит большое количество узких полос для наблюдений на частотах спектральных линий различных атомов и молекул (Table 1, 2 [117]). В частности, частоты 1606.8–1613.8 МГц отводятся для наблюдений в линии гидроксила. Однако часть спутников навигационной системы ГЛОНАСС излучает сигналы в этом диапазоне [111], что, естественно, мешает работе радиоастрономов.

Земная атмосфера прозрачна почти полностью для падающего извне излучения лишь в двух сравнительно узких окнах (рис. 1): оптическом — в диапазоне длин волн от 0,3 мкм  $300 \text{ ГГц} = 3 \cdot 10^{11} \text{ Гц}$  до 15–30 м (частота 20–10 МГц).

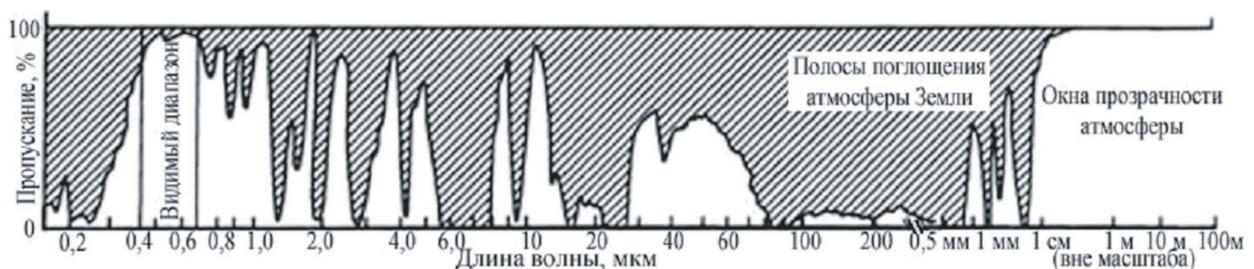


Рис. 1: Пропускание атмосферы в зависимости от длины волны.

Непрозрачность атмосферы для всех других длин волн определяется поглощением и рассеянием излучения на молекулах и атомах, а также отражением радиоволн от электронов ионосферы (для длинных волн).

В УФ-области спектра, т.е. в случае волн короче 0,3 мкм, излучение поглощается в основном слоем озона ( $O_3$ ), расположенного на высотах 20–60 км с максимумом концентрации на высоте около 27 км. Поглощение озоном доминирует вплоть до 0,18 мкм. Для длин волн короче 0,18 мкм поглощение определяется процессами ионизации и диссоциации молекул кислорода и азота, а также атомарного кислорода; уменьшение их концентрации с высотой приводит к тому, что атмосфера выше 150 км делается полностью прозрачной на всех длинах волн УФ-диапазона.

В ИК-диапазоне (от 0,8 до 100 мкм) и области субмиллиметровых длин волн ( $\lambda > 100$  мкм) имеется несколько окон прозрачности, и зависимость пропускания атмосферы от длины волны имеет весьма сложный вид. Поглощение в этой области спектра определяется, в основном, молекулами  $CO_2$  и  $H_2O$ , а также озона. Т.к. содержание водяных паров резко уменьшается с высотой, ИК-область спектра в значительной степени доступна наблюдениям с аэростатов и высотных самолетов.

В области миллиметровых длин волн ослабление падающего извне излучения зависит от влажности атмосферы и определяется полосами поглощения  $H_2O$ , а также молекулярного кислорода (рис. 2).

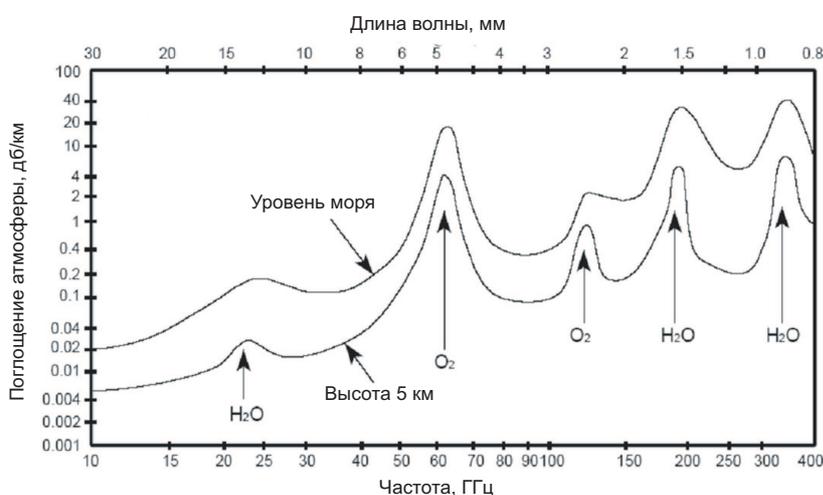


Рис. 2: Поглощение атмосферы в радиодиапазоне на уровне моря и на высоте 5 км.

Непрозрачность атмосферы в декаметровом диапазоне радиодиапазона определяется отражением радиоволн от ионосферы, простирающейся от 90 км до нескольких тысяч км от поверхности Земли.

Оптическое окно занимает относительно узкий диапазон длин волн с отношением граничных частот примерно 2,5:1, тогда как радиоокно покрывает диапазон 15000:1. Поэтому радиотелескопы проектируются и стро-

ются для работы в ограниченной части спектра. Телескопы, созданные для работы на коротких волнах, мало похожи на антенны метровых волн.

В таблице 2 приводятся обозначения частотных диапазонов и соответствующие им частоты и длины волн.

Таблица 2: Обозначения частотных диапазонов

Полоса	Длины волн (см)	Диапазон частот (ГГц)
L	21 – 17,6	1,4 – 1,7
S	15,8 – 11,1	1,9 – 2,7
C	8,8 – 4,2	3,4 – 7,075
X	4,1 – 3,6	7,25 – 8,4
Ku	2,8 – 2,0	10,7 – 14,8
K	1,9 – 1,1	15,4 – 27,5
Ka	1,1 – 0,6	27,5 – 50
W	0,5 – 0,27	65 – 110

Радиотелескоп состоит из трех основных элементов: зеркальной поверхности, отражающей и фокусирующей радиоволны на облучатель, приемника, совмещенного с облучателем, для усиления сигнала и системы преобразования сигнала с высокочастотного диапазона к промежуточной частоте. Зеркальной поверхностью является параболоид вращения, аналогичный зеркалам оптических телескопов.

Для получения интерферометрического отклика с двух радиотелескопов, разнесенных на большое расстояние, принятые сигналы должны быть преобразованы, сохранены и потом обработаны с соблюдением определенных требований. Это — комплексная задача на стыке астрофизики, радиофизики, астрометрии, вычислительной математики и кибернетики.

В монографии [7], написанной почти 30 лет назад, показаны перспективы радиоастрометрии, как нового в то время направления астрометрии. В данной работе автор считал своей задачей дать доступное изложение как принципов работы РСДБ (радиофизического комплекса и астрономического инструмента одновременно), так и принципов обработки астрометрических наблюдений, а также достижений в технологии, теории РСДБ, которые привели за эти годы к выдающимся результатам.

В главе 1 приводится краткий исторический обзор основных вех развития радиоастрономии, появления радиоинтерферометрии и использования этого метода в астрометрии. Рассказывается также о современной международной службе РСДБ, которая координирует все международные программы в области астрометрии и геодезии.

Поскольку современная небесная система координат фиксируется координатами самых удаленных объектов во Вселенной — квазаров, то приводятся последние данные об их строении, механизмах генерации излучения. За последние 10-20 лет именно благодаря успехам радиоастрономии удалось глубже понять физику квазаров.

В главе 2 излагаются основы радиоастрономии, даются понятия диаграммы направленности антенны, приводятся определения точечного и протяженного источников, антенной и яркостной температуры, функции видности, чувствительности интерферометра.

В главе 3 дается теория РСДБ, приводится описание работы РСДБ и отдельных элементов, дается определение измеряемых величин: амплитуды интерференционных полос (или коррелированной плотности потока), фазы интерференции (фазовой задержки), скорости изменения фазы со временем (частоты интерференции) и скорости изменения фазы с частотой (групповой задержки). Рассматриваются схемы и работа различных корреляторов.

В главе 4 даются основы редукции наблюдений на РСДБ.

В главе 5 приводятся основные алгоритмы решения линеаризованных уравнений для получения астрометрических и геодезических данных из наблюдений на РСДБ.

# Глава 1

## Основные задачи радиоастрометрии

Радиоастрометрия часто использует методы, развитые радиоастрономами для решения других задач. В данной главе рассмотрены принципы радиоинтерферометрии и устройство радиоинтерферометра со сверхдлинной базой (РСДБ) — инструмента, изначально предложенного для достижения высокого углового разрешения, что необходимо для изучения структуры компактных внегалактических радиоисточников [23, 43, 74, 133, 129], их переменности [224]. Однако очень быстро стало ясно, что потенциал РСДБ значительно шире [24], и метод может быть использован для решения многих задач, в частности, для проведения высокоточных позиционных наблюдений квазаров [109, 223] и космических аппаратов [179], а также для геодезических измерений [110, 77] и пр.

На основе более чем 40-летней истории развития радиоинтерферометрии со сверхдлинными базами можно сформулировать основные задачи в астрометрии и смежных областях, решение которых оказалось возможным только при использовании РСДБ:

- построение изображений радиоисточников с высоким разрешением [67, 214, 68, 70]; некоторые применения этого способа: определение абсолютных собственных движений компактных внегалактических радиоисточников [69], измерение движений отдельных излучающих компонент (ядер) джетов квазарах (см. стр. 46) [128, 189, 126], изучение областей вблизи активных галактических ядер, условий генерации джетов [155], определение параллаксов и собственных движений пульсаров [197, 52, 103, 83, 84];

- определение координат внегалактических радиоисточников и реализация небесной системы координат [157, 158, 120, 143], изучение зависимости положения ядер джетов от частоты [152, 139, 205, 206];
- определение относительных координат источников (дифференциальная астрометрия) [200, 161, 148, 102, 178], поиск экзопланет, обращающихся вокруг радиозвезд [149];
- измерение вариаций во вращении Земли и ориентации Земли в пространстве [113, 26];
- поддержание земной системы координат [38, 39];
- проверка теории относительности, измерение отклонения света в гравитационном поле, измерение скорости гравитации [97, 136, 137];
- измерение координат космических аппаратов [87, 144]: измерение координат и скоростей баллона в атмосфере Венеры (проект «Вега») [180, 194, 195], аппарата «Кассини» вблизи Сатурна [125], зонда «Гюйгенс» в атмосфере Титана [147, 176], лунного ровера [151], относительных координат двух зондов вблизи Луны [131];
- геодезические измерения, определение скоростей движения тектонических плит [110, 104, 174];
- уточнение теории распространения радиоволн в атмосфере Земли с целью повышения точности вычисления задержки [193, 159, 71].

В настоящее время существует несколько сетей РСДБ: в Европе, США, Японии.

Европейская РСДБ сеть (EVN) [89, 98, 142] состоит из телескопов в Европе, Китае, Южной Африке (более 20, включая строящиеся). Три телескопа российской сети «Квазар-КВО» [95] включены в сеть EVN в ноябре 2009 г. Сеть EVN работает под руководством Европейского консорциума РСДБ, который включает 14 институтов и среди них Объединенный институт РСДБ в Европе (Joint Institute for VLBI in Europe—JIVE) [124]. Обработка проводится на корреляторе EVN MkIV, расположенным в JIVE, начиная с 1998 г. [57]. Многие сеансы наблюдений в сети EVN проводятся в режиме e-VLBI [59], т.е. передача данных происходит по линиям связи в широкой полосе частот, и обработка (корреляция) этих данных выполняется в режиме реального времени.

Американская сеть «Очень большая решетка» (Very Long Baseline Array—VLBA) [166, 216] состоит из десяти телескопов диаметром 25 м каждый,

управляемых дистанционно из центра в Сокорро (Нью Мексико). Телескопы расположены на территории США. Максимальная база (Гавайи–Вирджинские о-ва) составляет  $\sim 9000$  км. Первые наблюдения были проведены в 1993 г.

Часто две сети: EVN и VLBA проводят совместные наблюдения, что позволяет говорить о глобальной сети РСДБ (Global VLBI). Когда одна или обе сети участвуют в наблюдениях совместно с космическими радиотелескопами (осуществленный проект HALCA [218], реализуемый в настоящее время Радиоастрон [41, 28]), то разрешение такого интерферометра может достигать микросекунд дуги.

Японская РСДБ сеть (Japanese VLBI Network – JVN) состоит из десяти антенн, расположенных в Японии [85, 86], включая четыре астрометрических антенны (проект VERA – VLBI Exploration of Radio Astrometry [134]). Базы интерферометров имеют длину  $50 \div 2560$  км. Обработка данных выполняется на FX-корреляторе в Национальной астрономической обсерватории Японии в Митаке [201].

## 1.1 Международная РСДБ служба

Международная РСДБ служба для решения задач геодезии и астрометрии (The International VLBI Service for Geodesy and Astrometry – IVS) координирует работу всех компонент (антенн, корреляторов, центров планирования и анализа наблюдений) РСДБ. Служба работает на основе решений Международной ассоциации геодезии (International Association of Geodesy – IAG) и Международного астрономического союза (International Astronomical Union – IAU) для обеспечения потребителей различной информацией: координатами квазаров, реализующих небесную систему координат (Celestial Reference Frame – CRF), координатами антенн, определяющих земную систему координат (Terrestrial Reference Frame – TRF), а также их изменением со временем, параметрами вращения Земли [202, 118].

Задачами IVS являются:

- обеспечение работы службы для поддержки геодезических, геофизических, астрометрических исследований;
- активизация и стимулирование работ по развитию новых геодезических и астрометрических методов наблюдений и анализа результатов;

- взаимодействие с другими службами для интегрирования сети в глобальную систему для мониторинга Земли.

Организационная структура IVS [119] состоит из:

- координационного центра (Coordinating Center — CC), который обеспечивает повседневную работу, а также определяет планы наблюдений на будущий год, готовит и публикует отчеты о работе, поддерживает информационную систему и сайт службы; расположен в Годдардовском центре космических полетов (Goddard Space Flight Center — GSFC, Greenbelt, USA);
- антенн (Network Stations — NS), участвующих в наблюдениях; всего в наблюдениях принимали участие более чем 170 антенн, регулярно в настоящее время работают по программам IVS 27 антенн; основная задача — это увеличение числа антенн в южном полушарии;
- трех операционных центров (Operations Centers — OC) для координации наблюдений на РСДБ (Institute for Geodesy and Geoinformation of the University of Bonn, Germany; Goddard Space Flight Center, Greenbelt, USA; US Naval Observatory, Washington, USA);
- шести корреляторов для обработки «сырых» данных (Max-Planck-Institute for Radio Astronomy, Bonn, Germany; Massachusetts Institute of Technology Haystack Observatory, Westford, USA; Institute of Applied Astronomy, Saint Petersburg, Russia; National Institute of Information and Communications Technology (NICT), Kashima, Japan; Geographical Survey Institute, Tsukuba, Japan; and US Naval Observatory, Washington, USA);
- шести центров данных (Data Centers — DC) для обеспечения доступа пользователей к данным, архивам, результатам обработки (Bundesamt für Kartographie und Geodäsie, Leipzig, Germany; NASA Crustal Dynamics Data Information System, Greenbelt, USA; Geodetic Data Archive Facility, Matera, Italy; National Institute for Astrophysics, Bologna, Italy; NICT, Kashima, Japan; and Paris Observatory, Paris, France)
- двадцати шести центров анализа (Analysis Centers — AC), которые выполняют вторичный анализ данных корреляции для получения геодезической и астрометрической информации, а также разрабатывают новые алгоритмы обработки наблюдений;

- семи центров по разработке новых технологий (Technology Development Centers — TDC) РСДБ.

Расположение компонент IVS показано на рис. 1.1.



Рис. 1.1: Компоненты Международной РСДБ службы (из отчета IVS за 2010 г. [119])

Качество величин, определяемых IVS, можно оценить по следующим характеристикам: точность, надежность, частота сеансов наблюдений (частота получения результатов), временное разрешение, задержка в выдаче результатов.

В таблице 1.1 приводятся основные величины, которые измеряются на геодезическо-астрометрических РСДБ, их точность (по данным отчета IVS за 2007 г.) [113] и перспективная точность (при наблюдениях на проектируемой сети VLBI2010) [173].

Для улучшения характеристик получаемых IVS величин разработан проект новой специализированной сети РСДБ, названный VLBI2010 [173], основанной на антеннах малого диаметра (12–13 м). Осуществление этого амбициозного проекта потребует разработки новых технологий: организации непрерывных наблюдений, приема сигналов в широкой полосе, оцифровки, регистрации и передачи данных с очень большой скоростью (см. § 3.7).

Напомним, почему вопросу определения параметров вращения Земли (ПВЗ) уделяется такое внимание. ПВЗ — это совокупность угловых ве-

Таблица 1.1: Основные величины, определяемые IVS, и их точность

Величина	Спецификация	По состоянию на 2007 г.	Перспективная точность
Координаты полюса $x_p, y_p$	*	50–80 мкс дуги	25 мкс дуги
	**	8–12 суток	в реальном времени
	***	1 сутки	10 минут
	****	3 раза в неделю	почти непрерывно
UT1-UTC	*	3 мкс	2 мкс
	**	3–4 суток	в реальном времени
	***	1 day	10 минут
	****	3 раза в неделю	почти непрерывно
Небесный полюс $\Delta\varepsilon, \Delta\psi$	*	50 мкс дуги	25 мкс дуги
	**	8–12 суток	1 сутки
	***	1 сутки	1 сутки
	****	3 раза в неделю	7 раз в неделю
TRF ( $X, Y, Z$ )	*	5 мм	2 мм
	**	8–12 суток	1 сутки
	***	3 раза в неделю	7 раз в неделю
	****		
CRF $\alpha, \delta$	*	0.25 мс дуги	0.25 мс дуги
	**	3 месяца	1 месяц
	***	1 год	1 год
	****		

\*Точность.

\*\* Задержка в выдаче.

\*\*\* Временное разрешение

\*\*\*\* Частота получения

личин, определяющих ориентацию Земли в инерциальной системе координат. В математическом и астрономическом смысле эти углы определяют положение земной, вращающейся, системы координат относительно небесной инерциальной системы. Земная система реализуется заданием координат и скоростей выбранных пунктов (пунктов ITRF) на поверхности Земли. Небесная система координат (ICRF) реализуется положениями квазаров (компактных внегалактических радиоисточников, находящихся на очень больших расстояниях от Земли, в связи с чем их можно считать практически неподвижными). Таким образом, знание ПВЗ дает возможность преобразовывать координаты из вращающейся земной системы в инерциальную небесную и обратно.

Фундаментальные научные исследования, при проведении которых требуется знать вращение Земли и использовать ПВЗ — это определение координат различных небесных объектов; изучение геодинимических явлений, таких как тектонические движения, подъем и опускание различных

регионов и т.д.; изучение внутреннего строения Земли, геофизических явлений и их влияния на процессы, происходящие на поверхности Земли и в окружающем пространстве; изучение динамики атмосферы, океанов и ледников; изучение гравитационного поля Земли.

К числу областей производственной деятельности, нуждающихся в информации о ПВЗ, относятся наземная и космическая геодезия, аэрокосмические съемки, картографирование; космическая, воздушная, наземная и морская навигация; координатно-временное обеспечение и прецизионная служба Всемирного времени, метеорология; мониторинг природных ресурсов; экология, прогноз землетрясений и техногенных катастроф; мониторинг крупных объектов (плотин, газопроводов и т.д.) и обеспечение безопасности их эксплуатации и т.д.

Особые требования к информации о ПВЗ, в особенности к точности, оперативности и надежности обеспечения данными, предъявляются со стороны современных средств оборонной техники.

Помимо указанных в табл. 1.1 основных величин планируется находить дополнительные параметры (табл. 1.2).

Таблица 1.2: Дополнительные параметры

Параметры вращения Земли	Продолжительность суток $dUT1/dt$
Земная система координат (TRF)	Скорость движения полюса $dx_p/dt, dy_p/dt$
	Временные ряды координат $X, Y, Z$
	Эпизодические события
	Нелинейные изменения координат $X, Y, Z$
Небесная система координат (CRF)	Ежегодные решения по всему массиву данных
	Структура источников
	Плотность потока
	Ежегодные решения по всему массиву данных
Геодинамические параметры	Приливы в твердой Земле (числа Лява $h, l$ )
	Нагрузка от океанических приливов (амплитуды $A_i$ , фазы $\varphi_i$ )
	Нагрузка от атмосферы (коэффициенты, зависящие от места)
	Тропосферные параметры
	Ионосферные параметры

В настоящее время IVS планирует и осуществляет следующие программы наблюдений:

- IVS-R1 и IVS-R4 для определения параметров ориентации Земли (Earth orientation parameters — EOP). Сеансы наблюдений проводятся два

раза в неделю (по понедельникам и четвергам). Сеанс длится 24 часа, в наблюдениях участвуют 6-8 антенн. В базу данных результаты заносятся не позднее, чем через 15 суток после сеанса. Программу R1 координирует Годдардовский центр космических полетов NASA, R4 – Военно-морская обсерватория США (U.S. Naval Observatory – USNO);

- программа INTENSIVE для определения всемирного времени UT1. Сеансы продолжительностью 1 час проводятся ежедневно; программа «INT1» выполняется на базе Веттцель (Германия) – Кокки Парк (Гавайи, США) с понедельника по пятницу, программа «INT2» на базе Веттцель (Германия) – Цукуба (Япония) по субботам и воскресеньям. С августа 2007 г. начата третья программа «INT3» для заполнения 36-часового пропуска между сеансами программ INT1 и INT2, в которой принимают участие телескопы в Нью-Алезунде, Цукубе и Веттцеле. Как правило, результаты определения UT1–UTC получаются в течение 24 часов после наблюдений;
- программа IVS-T2 координируется Институтом геодезии и геоинформации университета Бонна (Institute of Geodesy and Geoinformation) и проводится раз в два месяца. В сеансе принимают участие 12 телескопов. Задачей является определение координат телескопов для поддержания земной системы координат. Наблюдения спланированы так, что каждая из антенн IVS принимала участие в программе 3-4 раза в год;
- программы IVS–CRF, IVS–CRMS, IVS–CRD направлены на поддержание и расширение небесной системы координат (CRF). Программы координируются USNO. Особое внимание уделяется наблюдениям южных источников со средними склонениями («MS – Median South») и большими склонениями («D – Deep-south»);
- программа VLBA, осуществляемая под руководством Национальной радиоастрономической обсерватории США (National Radio Astronomy Observatory – NRAO). В сеансах принимает участие 10 телескопов сети VLBA и несколько телескопов сети IVS. В год проводится несколько суточных сеансов для решения астрометрических и геодезических задач, в том числе для построения карт радиоисточников из списка ICRF;
- программа EUROPE, координируемая Институтом геодезии и геоинформации университета Бонна, предполагает участие в наблюде-

ниях большинства телескопов, расположенных в Европе, для решения астрометрических и геодезических задач. В год проводится несколько суточных сеансов;

- программа JADE — «Наблюдения динамики Земли с помощью японской сети РСДБ» (The Japanese Dynamic Earth observation by VLBI) — выполняется на телескопах, расположенных в Японии, включая 32-метровую антенну в Цукубе. Задачей программы является мониторинг движений антенн, привязка внутренней сети к земной системе координат ITRF;
- программа IVS-R&D для проведения специальных сеансов (R&D — Research and Development) для тестирования новых технологий РСДБ;
- программа CONT — проведение непрерывных наблюдений в течение двух недель с целью изучения высокочастотных (суточных и полусуточных) вариаций во вращении Земли. Программа проводилась в январе 1994 г. (CONT94), августе 1995 г. (CONT95), октябре 2002 г. (CONT02), сентябре 2005 г. (CONT05), августе 2008 (CONT08). Программа CONT11 проведена в сентябре 2011 г. В наблюдениях участвуют 13 антенн.

## 1.2 Краткий исторический обзор

Для изучения космического радиоизлучения астрономы измеряют один или несколько параметров электромагнитного излучения. К ним относятся: интенсивность, частота, поляризация, направление прихода волны и связанное с ним положение источника на небесной сфере, а также изменение этих параметров во времени.

Мощность космического радиоизлучения на поверхности Земли очень мала. Как правило космическое радиоизлучение имеет характер случайного шума. Исключениями являются импульсное излучение, приходящее от быстровращающихся нейтронных звезд — пульсаров, межпланетные и ионосферные осцилляции радиоисточников малых размеров, нерегулярные вспышки от некоторых звезд (включая Солнце).

Впервые радиоволны внеземного происхождения были открыты Карлом Янским, работавшим в фирме Белл (США). Чтобы исследовать направление прихода атмосферных помех, создававших нежелательные радишумы в приемниках линий связи, он сконструировал поворачивающуюся антенну, осуществлявшую прием на волне 14,6 м (рис. 1.2).



Рис. 1.2: Копия телескопа К.Янского, установленная в Национальной радиоастрономической обсерватории (НРАО), Западная Вирджиния, США.

К 1933 г. К.Янский пришел к выводу, что имеются три источника регистрируемых им шумов: местные грозы, суммарное радиоизлучение от далеких грозовых разрядов и источник внеземного происхождения, находящийся вблизи центра Галактики. Впоследствии Янский показал, что внеземное радиоизлучение исходит от всего Млечного Пути, но наибольшая интенсивность наблюдается из галактического центра [121]. Осознав значимость своего открытия, Янский предложил сконструировать параболическую антенну для дальнейших наблюдений на метровых волнах, однако его предложение не встретило поддержки.

В честь заслуг К.Янского единица измерения плотности потока радиоисточников была названа «янский», сокращенно *ян* (см. стр. 53). Таким образом, «янский» — это единица измерения мощности излучения, принимаемого на единицу площади в единичной полосе частот.

Работы К.Янского продолжил американский инженер Грот Рёбер, который на собственные средства в 1937 г. во дворе своего дома построил первый радиотелескоп-параболоид диаметром 9,5 м (рис. 1.3).

Первые наблюдения он провел на волнах 9 и 33 см. Он предположил, что происхождение радиоизлучения обязано горячему межзвездному газу, так что спектр внеземного радиоизлучения должен подчиняться закону Планка (см. § 1.3.1). Поэтому интенсивность должна возрастать в сторону коротких волн. Если бы космическое излучение имело тепловую при-



Рис. 1.3: Телескоп Г.Рёбера, перенесенный на территорию НРАО, Западная Вирджиния, США

роду, то на волне 9 см его интенсивность была бы в 26 тысяч раз больше, чем у К.Янского на волне 14,5 м. Однако первые опыты дали на этих волнах отрицательный результат. Как выяснилось позже, космическое излучение имеет нетепловую природу, и его интенсивность с уменьшением длины волны не растет и может даже уменьшаться. Рёбер понял это и стал использовать более длинноволновые приемники.

Лишь в 1939 г. он зарегистрировал внеземное радиоизлучение на волне 1,87 м (ему соответствует частота  $f = 160$  МГц). В 1940-х гг. были опубликованы работы Рёбера [183], содержавшие первые карты распределения радиоизлучения по небу. В 1948 г. Рёбер опубликовал также карты неба на волне 62,5 см ( $f = 480$  МГц) [184].

В 1946 г. М. Райл и Д. Вонберг сконструировали первый радиоинтерферометр для исследования космического радиоизлучения. В интерферометре использовались дипольные антенные решетки на частоте 175 МГц с изменяемым расстоянием между ними от 17 м до 240 м [191].

В Англии Дж. Хей, Дж. Филлипс и С. Парсонс [108] начали обзор неба на длине волны 4,7 м (64 МГц) и в 1946 г. обнаружили флуктуации излучения из созвездия Лебедь. Болтон и Стенли [50], наблюдая эту область на интерферометре, обнаружили, что излучение исходит из компактной об-

ласти размером менее  $8'$ . Это было подтверждением того факта, что часть космического радиоизлучения может приходить от компактных или «дискретных» источников.

Современные радиоастрономические инструменты дают потенциальную возможность наблюдать миллионы таких источников [88, 175, 146, 48, 78]. Поток радиоизлучения от самых слабых источников в миллионы раз слабее потока от наиболее ярких из известных источников. Подавляющее большинство слабых источников находится за пределами Млечного Пути, часть из них отождествлены с галактиками. Основная же часть неотожествлённых источников, по-видимому, связана с радиогалактиками и квазарами. Наша Галактика также является источником радиоизлучения — она излучает примерно  $4 \times 10^{38}$  эрг/сек (около  $10^{-6}$  ее полного излучения в оптическом диапазоне), тогда как некоторые внегалактические источники излучают до  $10^{45}$  эрг/сек, что близко к мощности их оптического излучения. Такие объекты называются радиогалактиками.

Х. Альфвен и Н. Герлофсон предположили, что излучение подобных радиоисточников может быть объяснено за счет излучения релятивистских электронов, движущихся в магнитных полях [37]. Теория синхротронного излучения галактик и излучения из оболочек сверхновых звезд была разработана В.Л. Гинзбургом [5, 6]. Согласно этой теории, многочисленные предсказания которой были полностью подтверждены последующими наблюдениями, радиоизлучение возникает при движении релятивистских электронов в магнитных полях радиоисточников.

Радионаблюдения квазаров привели к модели (см., например, [44, 45, 130, 138]), состоящей из активного галактического ядра с массивным центральным телом, которым может быть сверхмассивная черная дыра, окруженная аккреционным диском с падающим на дыру газом и вылетающими джетами высокоэнергетичных частиц. Эти релятивистские частицы, взаимодействуя с магнитным полем, производят протяженные области радиоизлучения.

Наряду с внегалактическими источниками наблюдаются также галактические источники радиоизлучения. Это — остатки вспышек сверхновых звезд (например, Крабовидная туманность). Излучение в этом случае также является синхротронным. Кроме того, в Галактике (а также в ближайших галактиках, например в Магеллановых Облаках) наблюдаются источники теплового радиоизлучения. Последними являются межзвёздные облака газа. Спектр этого излучения отличен от синхротронного и подчиняется закону Планка [13].

Все упоминавшиеся выше источники характеризуются непрерывным спектром. Наряду с этим в ряде случаев наблюдаются отдельные спектраль-

ные радиолинии, причём как в излучении, так и в поглощении. Наиболее важной из них является линия водорода с длиной волны 21 см. Существование этой линии впервые было теоретически предсказано Х. ван де Хюлстом в 1944 г. [112]. Она была открыта в 1951 г. Х. Юэном, Э. Перселлом [90]. В 1949 г. И.С. Шкловский предсказал новый класс межзвёздных молекулярных линий, в частности, линию ОН с длиной волны 18 см [34]. Линия была открыта в 1963 г. [222]. В течение нескольких следующих лет были открыты более 10000 линий 125 межзвёздных молекул в диапазоне частот от 0,7 до 350 ГГц [153].

В 1966 г. были открыты источники радиоизлучения нового типа с высокой яркостью, излучающие на этой волне [171]. Излучение таких источников имеет мазерную природу. Вскоре были открыты ещё более интенсивные мазерные космические источники на волне 1,35 см в линии паров воды [72, 162].

В 1965 г. А. Пензиасом и Р.В. Вильсоном в сантиметровом диапазоне длин волн было обнаружено «реликтовое» излучение Вселенной, характеризующееся тепловым спектром с максимумом при температуре около 3 К.

Появление радиоастрономии привело к обогащению наших знаний о Вселенной. Радиоастрономические наблюдения дали информацию о структуре и эволюции галактик, о межзвёздных газовых облаках и формированию звезд в них, о межзвёздных магнитных полях и др. Изучение спектров излучения атомов и молекул дало информацию о составе, физических характеристиках и движении газовых облаков. Информация, которую дает радиоастрономия, часто уникальна. Например, атомарный водород (HI) обнаружим только при наблюдениях на частоте 1420 МГц, распределение его и движение облаков газа, состоящего из водорода, может быть изучено только из радиоастрономических наблюдений.

Рассмотрим теперь кратко механизмы космического радиоизлучения.

### 1.3 Источники и механизмы космического радиоизлучения

Космическое радиоизлучение можно классифицировать по различным признакам: по пространственному распределению, по спектральному составу, по временным характеристикам, по поляризации. Каждый из признаков или их комбинация характеризует механизм радиоизлучения, на основе чего можно строить гипотезы о строении радиоисточника.

По пространственному распределению радиоизлучение можно разделить на фоновое (нетепловое излучение Галактики и реликтовый фон) и

излучение дискретных источников, к которым относятся излучающие области с достаточно четкими границами.

Почти изотропное реликтовое излучение имеет яркостную температуру  $2,73\text{ К}$  и связано с тепловым излучением остывшей Вселенной со времени, когда вещество стало прозрачным для радиоизлучения. На реликтовое излучение накладывается также интенсивное излучение от диска нашей Галактики с максимумом в направлении центра. Галактическое излучение по большей части имеет нетепловую природу, но область в пределах галактического диска, содержит и тепловой вклад от облаков ионизованного водорода с температурой около  $10000^\circ$  (зоны НII). Наблюдается также тепловое радиоизлучение от областей газа НI, в которых водород и другие атомы остаются неионизованными, а температура составляет  $100^\circ$ . Помимо этих источников тепловое радиоизлучение имеют звезды (включая Солнце), планеты. Нетепловые источники в Галактике связаны с остатками сверхновых (с расширяющимися оболочками звезд).

Самый большой класс радиоисточников излучает в широком спектре частот (континууме), причем нетепловые и тепловые источники показывают различную зависимость интенсивности от частоты. Видно (рис. 1.4), что плотность потока одних источников почти постоянна в широком диапазоне частот, источники другого типа имеют более высокую плотность потока на низких частотах. Луна является примером черного тела, и ее излучение очень хорошо описывается законом Рэлея–Джинса (см. стр. 27) с температурой  $T \approx 225\text{ К}$ .

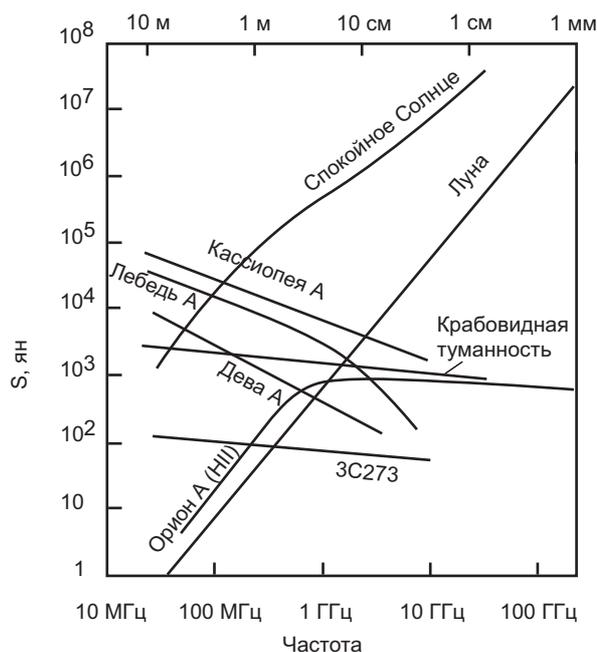


Рис. 1.4: Спектры некоторых радиоисточников.

Допустим, что изменение плотности потока  $S$  с длиной волны  $\lambda$  (или частотой  $\nu$ ) выражается зависимостью)

$$S \sim \lambda^{-n} \sim \nu^n, \quad (1.1)$$

где  $n$  — спектральный индекс. Как показано ниже, тепловое излучение черного тела характеризуется спектральным индексом, равным  $n = 2$ . Именно этот вывод служит доказательством того, что излучение Луны имеет тепловой характер.

Противоположный наклон спектров Девы А, Кассиопеи А, Лебедя А говорит о том, что излучение этих источников вызывается другим механизмом. Источники с отрицательным индексом относятся к нетепловым источникам. Спектр Кассиопеи А имеет индекс примерно  $-0,77$ , Девы А —  $-0,83$ . Спектральные индексы большинства нетепловых источников лежат в диапазоне от  $-0,3$  до  $-1,3$  со средним значением около  $-0,8$ .

Спектр туманности Ориона на низких частотах ведет себя как спектр излучения черного тела. На высоких частотах спектр становится почти плоским. Туманность представляет собой большое облако водорода, который ионизирован ультрафиолетовым излучением горячих звезд. Радиоизлучение возникает при ускоренном движении электронов при пролете вблизи протонов. Это так называемый тормозной механизм.

Однако кроме источников с непрерывным спектром в Галактике много источников с монохроматическим излучением (в спектральных линиях атомов и молекул). Наиболее известны линии водорода с  $\lambda = 21,2$  см и гидроксила ОН с  $\lambda = 18,3$  см. Возможны такие варианты. Оптически толстое облако газа НІ полностью поглощает в линии  $\lambda = 21,2$  см излучение расположенного сзади источника с высокой яркостной температурой, но излучает в этой линии уже с яркостной температурой около  $100^\circ$ . Более частый случай — поглощение излучения расположенного позади области неионизованного водорода интенсивного источника с непрерывным спектром. На частотах, близких к линии водорода, в спектре такого источника наблюдается провал из-за поглощения в области НІ.

Наконец, в газовом облаке могут быть созданы необходимые условия для генерации излучения путем накачки (мазерный эффект).

Нетепловое излучение от внегалактических источников и от источников в плоскости Галактики очень часто линейно поляризовано. Это излучение — так называемое синхротронное излучение, производимое электронами, ускоряющимися в магнитном поле. Таким образом, обнаружение поляризации излучения предполагает наличие магнитного поля. Изучение поляризованного излучения, связанного с остатками сверхновых, дает воз-

возможность взглянуть на взаимодействие остатков взрыва с окружающими их межзвездными магнитными полями.

Однако положение плоскости поляризации в точке приема часто отличается от такового в точке излучения из-за Фарадеевского вращения из-за присутствия магнитных полей между источником и наблюдателем. Фарадеевское вращение изменяется как обратный квадрат частоты, и его можно измерить, используя измерения поляризации в разных участках спектра. Таким образом изучение Фарадеевского вращения — это мощное средство для изучения плотности электронов и магнитных полей в межзвездной среде.

Линейная поляризация (сохранение направления электрического вектора) не единственно возможная в природе. Электрический вектор может вращаться по кругу. Тогда радиоволна имеет «правую» или «левую» круговую поляризацию или, в общем случае, эллиптическую поляризацию.

### 1.3.1 Тепловое излучение

Тепловое излучение генерируется любым нагретым телом: горячей плазмой, нейтральным газом (межзвездные облака газа, горячие оболочки звезд и т.д.), твердыми телами. Оно имеет сплошной спектр, положение максимума которого зависит от температуры вещества. Закон распределения энергии в спектре равновесного излучения в зависимости от температуры вещества был выведен в 1900 г. Максом Планком.

Термодинамически равновесное поле излучения можно получить внутри замкнутой полости с теплоизолирующими стенками, называемой абсолютно черным телом. Внутри такой полости фотоны распределены однородно и изотропно, интенсивность излучения определяется формулой Планка. Черное тело поглощает все излучение, падающее на него на всех длинах волн, а его собственное излучение является функцией только температуры и длины волны.

В соответствии с законом Планка интенсивность излучения черного тела при температуре  $T$  на частоте  $\nu$  равна:

$$B(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}, \quad (1.2)$$

где  $B(\nu)$  — интенсивность [ $\text{Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{Гц}^{-1} \cdot \text{стерад}^{-1}$ ],  $h = 6.626176 \cdot 10^{-34}$  Дж·с — постоянная Планка,  $k = 1.380662 \cdot 10^{-23}$  Дж/К — постоянная Больцмана,  $T$  — температура ( $^{\circ}\text{К}$ ). Интенсивность имеет размерность мощности на единицу площади, на единицу частотного интервала и единицу телесного

угла. С повышением температуры возрастает общая энергия испускаемого теплового излучения, а максимум перемещается в область более коротких длин волн (более высоких частот).

Кривые Планка для излучения черного тела показаны на рис.1.5.

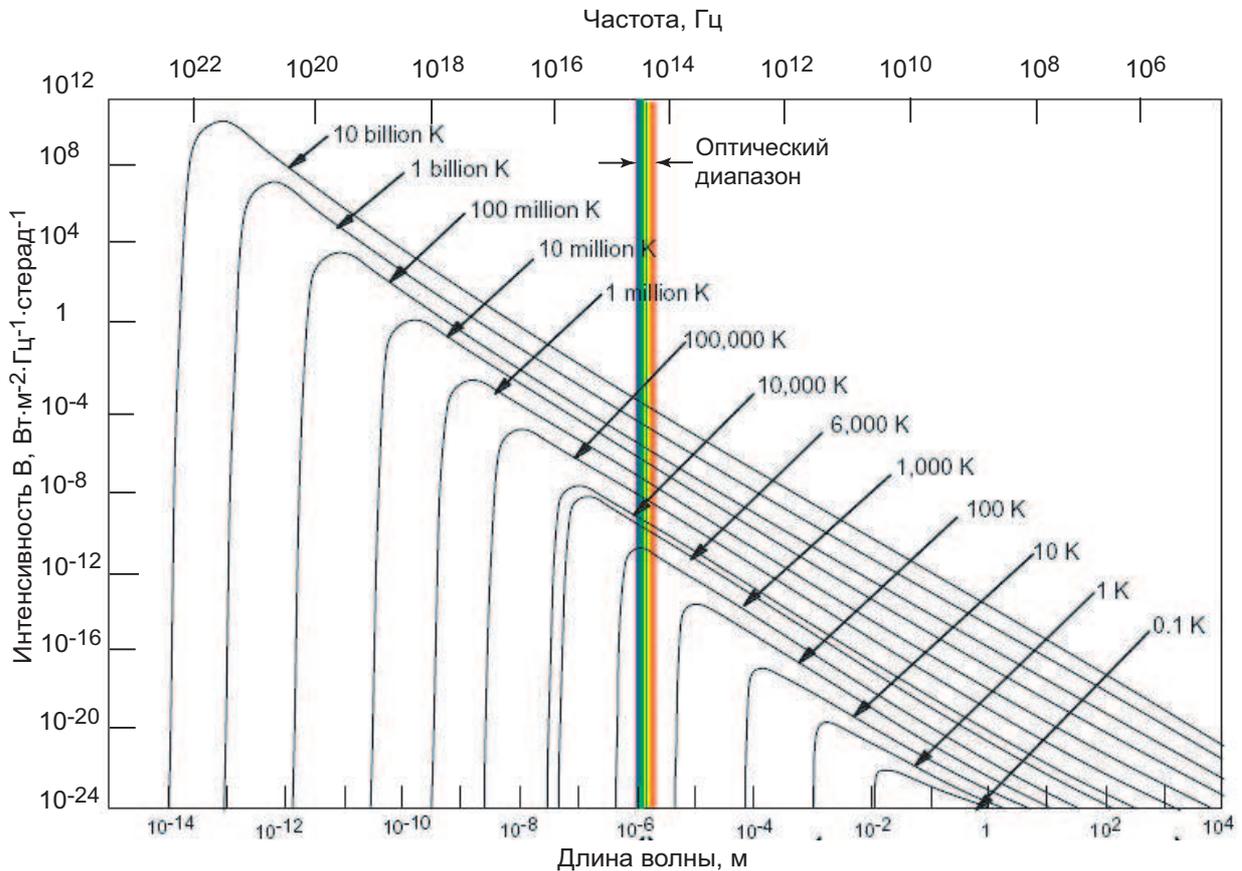


Рис. 1.5: Интенсивность излучения черного тела в зависимости от длины волны.

Для радиоволн произведение  $h\nu$  значительно меньше  $kT$  ( $h\nu \ll kT$ ). В этом случае закон Планка переходит в закон Рэля—Джинса:

$$B = \frac{2kT}{\lambda^2}, \quad (1.3)$$

т.е. интенсивность пропорциональна температуре и обратно пропорциональна квадрату длины волны. Из закона Рэля—Джинса и выражения (1.1) следует, что тепловое излучение черного тела характеризуется спектральным индексом  $n$ , равным 2.

Интенсивность  $B(\nu)$  (1.2) определяется на частоте излучения  $\nu$ . Чтобы вычислить полный поток энергии от черного тела необходимо проинтегри-

ровать выражение (1.2) по всем частотам:

$$B = \int_0^{\infty} B(\nu) d\nu.$$

Интегрирование приводит к выражению:

$$B = \sigma T^4, \quad (1.4)$$

которое называется законом Стефана–Больцмана,  $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup>К<sup>4</sup>).

Если источник излучения представляет собой черное тело с постоянной температурой  $T$  и занимает телесный угол  $\Omega_s$ , то интегрирование по  $\Omega_s$  определяет плотность потока  $S$ , которая равна по закону Рэлея–Джинса (при  $h\nu \ll kT$ ):

$$S = \int_{\Omega_s} B(\nu, \Omega) d\Omega = \frac{2kT\Omega_s}{\lambda^2}, \quad (1.5)$$

где  $d\Omega$  — элемент телесного угла,  $S$  имеет размерность [Вт · м<sup>-2</sup> · Гц<sup>-1</sup>].

### 1.3.2 Поглощение излучения и оптическая толщина

При прохождении волны в поглощающей среде происходит ее затухание.

Плотность потока  $S$  волны при прохождении расстояния  $dx$  в среде с коэффициентом затухания  $\alpha$  будет уменьшаться на величину  $dS$ :

$$dS = -S\alpha dx.$$

Если на границе среды (при  $x = 0$ ) плотность потока равна  $S_0$ , то решение уравнения есть

$$S = S_0 e^{-\alpha x}. \quad (1.6)$$

Произведение  $\alpha x$  называется оптической толщиной среды и обозначается символом  $\tau$ :

$$\tau = \alpha x. \quad (1.7)$$

Для газообразной среды удобно выражать коэффициент затухания  $\alpha$  как произведение плотности газа  $\rho$  и коэффициента поглощения  $K$ :

$$\alpha = K\rho. \quad (1.8)$$

Если облако газа одновременно излучает и поглощает излучение, то его яркость можно найти из следующих выражений.

Мощность на единицу частотного интервала излучающего объема  $dv$  равна

$$dw = \gamma\rho dv, \quad (1.9)$$

где  $\gamma$  — коэффициент излучения. Плотность потока  $S$ , регистрируемая на расстоянии  $r$  от излучающего объема, равна

$$dS = \frac{dw}{4\pi r^2},$$

а интенсивность, как мощность в телесном угле  $d\Omega$ , равна  $dB = dS/d\Omega$ . Так как  $dv = r^2 dr d\Omega$ , то

$$dB = \frac{\gamma \rho dr}{4\pi}. \quad (1.10)$$

Однако поглощение излучения в слое от  $r = 0$ , где находится объем  $dv$ , до  $r$  приведет к ослаблению излучения на величину

$$\exp\left(-\int_0^r K \rho dr\right) = \exp(-\tau),$$

где  $\tau = \int_0^r K \rho dr$  — оптическая толщина среды на расстоянии от 0 до  $r$ .

Значит, на расстоянии  $r$  от излучающего объема интенсивность будет равна

$$dB = \frac{\gamma \rho dr}{4\pi} e^{-\tau}.$$

Интенсивность всей толщины облака, равной  $R$ , может быть найдена интегрированием этого выражения (предполагаем, что  $K = \text{const}$ ):

$$B = \frac{\gamma}{4\pi K} \int_0^R e^{-\tau} K \rho dr.$$

Если  $\tau_R = \int_0^R K \rho dr$  — оптическая толщина всего облака, то

$$B = \frac{\gamma}{4\pi K} \int_0^{\tau_R} e^{-\tau} d\tau \quad (1.11)$$

и, интегрируя (1.11), получим

$$B = \frac{\gamma}{4\pi K} (1 - e^{-\tau_R}). \quad (1.12)$$

При увеличении оптической толщины интенсивность стремится к величине  $B_R = \gamma/4\pi K$ .

Используя закон Рэля–Джинса (1.3), интенсивность (1.12) можно выразить через температуру, используя соотношения  $T = B\lambda^2/2k$  и  $T_R = B_R\lambda^2/2k$ :

$$T = T_R(1 - e^{-\tau_R}). \quad (1.13)$$

Величина  $T$  называется яркостной температурой. По своему физическому смыслу, так как используется закон Рэля–Джинса, она равна температуре черного тела, интенсивность излучения которого равна наблюдаемой, тогда как  $T_R$  — это действительная яркостная температура облака. Из выражения (1.13) следует, что при увеличении оптической толщины яркостная температура приближается к действительной температуре, т.е. при  $\tau_R \gg 1$  получим  $T = T_R$ . Если же облако оптически прозрачно для радиоволн (при  $\tau_R \ll 1$ ), то

$$T = T_R \tau_R. \quad (1.14)$$

### 1.3.3 Тормозное излучение

Теория тормозного излучения изложена во многих учебниках и монографиях (например, [13, 19]). Механизм тормозного излучения отвечает за радиоизлучение солнечной короны и корон звезд, зон НII, планетарных туманностей, газа в скоплениях галактик и т.п. Тормозное излучение также определяет значительную часть ИК- и оптического излучения звезд.

Тормозное излучение возникает в результате торможения заряженной частицы при взаимодействии с электростатическим полем атомного ядра и электронов. Заряженная частица, движущаяся с ускорением, обязательно излучает электромагнитные волны, что приводит к радиационным потерям энергии. При кулоновском взаимодействии с ядрами и электронами возникающее излучение называется тормозным излучением.

При кулоновском рассеянии на ядре частица, имевшая скорость  $V$ , отклоняется от первоначального направления и, следовательно, получает ускорение  $dV/dt$  и в течение времени  $dt$  излучает энергию

$$dE \approx \frac{2}{3c^3} \left( \frac{dV}{dt} \right)^2 dt.$$

Если заряд частицы равен  $e$ , масса  $m$ , заряд ядра  $Z$ , то

$$dE \sim \frac{e^2}{m^2} Z^2.$$

Из этого соотношения можно сделать следующий вывод. Потери энергии на излучение обратно пропорциональны квадрату массы частицы. Это приводит к тому, что тяжелые частицы излучают значительно меньшую энергию, чем легкие. Например, протон ( $M = 1836m$ ) излучает энергию в  $3,4 \cdot 10^6$  раз меньшую, чем электрон. Поэтому радиационные потери энергии наибольшее значение имеют для легчайших заряженных частиц — электронов.

Полное рассмотрение потерь энергии на излучение электроном было проведено в 1934 г. Бете и Гайтлером. В качестве первого результата было получено сечение процесса, при котором рассеяние электрона энергии  $E$  сопровождается испусканием кванта электромагнитного излучения с энергией  $E'$  в интервале  $(E', E' + dE')$ . Вероятность излучения существенным образом зависит от эффективного расстояния электрона от ядра, т.е. от прицельного параметра. Последний зависит от плотности свободных электронов  $N$ . Если считать, что скорость электронов определяется только тепловым движением, то средняя скорость пропорциональна квадратному корню из кинетической температуры электронов, т.е.  $\sqrt{T_e}$ .

В [35] показано, что для ионизованного водорода коэффициент затухания  $\alpha$  (1.8) на радиочастотах  $\nu$  (при  $h\nu/kT \ll 1$ ) может быть представлен в виде:

$$\alpha \sim N^2 T_e^{-3/2} \nu^{-2}.$$

Если величины  $N$  и  $T_e$  постоянны вдоль всего пути поглощения  $l$ , то оптическая толщина (1.7) равна

$$\tau = \int_0^l \alpha dl \sim N^2 T_e^{-3/2} \nu^{-2} l.$$

Так как плотность потока  $S$  (1.5) равна:

$$S = \frac{2kT\Omega_s}{\lambda^2},$$

т.е.

$$S \sim \frac{T}{\lambda^2},$$

то при  $\tau \gg 1$  имеем  $T = T_R$  и  $S \sim \frac{T_R}{\lambda^2} \sim T_R \nu^2$ . Спектральный индекс тормозного излучения оптически толстой области равен  $n = 2$ , как и в случае излучения черного тела.

При  $\tau \ll 1$  имеем  $T = T_R \tau$  (1.14) и  $S \sim \frac{T_R}{\lambda^2 \nu^2}$ , т.е. плотность потока не зависит от частоты (спектральный индекс  $n = 0$ ).

Типичная область ионизованного водорода является оптически толстой на длинных волнах со спектральным индексом  $n = 2$  и оптически тонкой на коротких волнах ( $n = 0$ ). Примером может служить спектр туманности Ориона (рис. 1.5). Переход от оптически толстого к оптически тонкому слою происходит на длине волны около 30 см, где  $\tau \approx 1$ .

### 1.3.4 Синхротронное излучение

Нетепловое излучение, главным образом синхротронное излучение, вызывается электронами, движущимися с релятивистскими скоростями в магнитных полях.

Впервые синхротронное излучение предсказано Э.Шоттом (1913), и наблюдалось в синхротронном ускорителе, в котором электроны разгонялись до релятивистских скоростей.

Синхротронное излучение обусловлено ускорением, связанным с искривлением траекторий электронов в магнитном поле. Аналогичное излучение нерелятивистских частиц, движущихся по круговым или спиральным траекториям, называется циклотронным (магнитотормозным) излучением. Из теории следует, что оно происходит на основной гиромангнитной (циклотронной) частоте  $\nu = qH/(2\pi m_0 c)$  ( $q$  и  $m_0$  — заряд и масса покоя частицы,  $H$  — напряженность магнитного поля).

Для релятивистских электронов, движущихся со скоростью  $v$ , близкой к скорости света  $c$ , энергия выражается формулой

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \gamma m_0 c^2 = mc^2,$$

где  $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$  — релятивистский фактор или фактор Лоренца.

В зависимости от угла между вектором напряженности магнитного поля и вектором скорости электрона последний описывает либо окружность (если компонента скорости вдоль поля равна нулю), либо спираль. Циклическая частота вращения электрона в магнитном поле  $H$  равна

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{qH}{m_0 c} \cdot \frac{m_0 c^2}{E} = \frac{qH}{m_0 c} \sqrt{1 - (v/c)^2},$$

$q = 1,6021892 \cdot 10^{-19}$  Кл и  $m_0 = 9,11 \cdot 10^{-31}$  кг — заряд и масса покоя электрона.

Здесь и далее под  $H$  будет подразумеваться компонент поля, перпендикулярный вектору скорости частицы.

Излучение электрона сосредоточено в узком конусе, направленном вдоль мгновенной скорости электрона, с углом раствора  $\Delta\varphi = 2m_0 c^2/E = 2/\gamma$ . Конус поворачивается вместе с поворотом вектора мгновенной скорости электрона (рис. 1.6).

Это означает, что наблюдатель, находящийся в плоскости орбиты электрона, видит вспышки излучения в те моменты времени, когда скорость электрона направлена на него, т.е. начиная с момента, когда электрон находится в точке 1, и заканчивая, когда он находится в точке 2. Вспышки

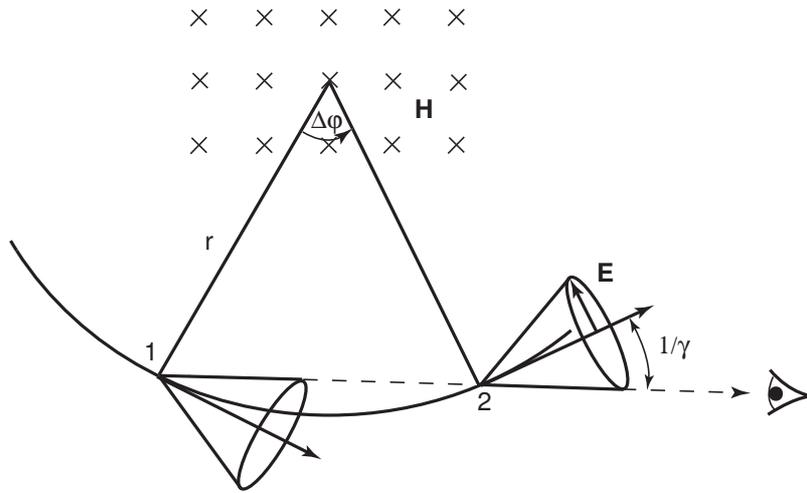


Рис. 1.6: Излучение релятивистского электрона во внешнем магнитном поле  $H$ . В плоскости, в которой расположены векторы скорости электрона  $v$  и напряженности электрического поля  $E$ , излучение линейно поляризовано.

следуют через промежутки времени  $1/\nu$ , длительность каждой вспышки в системе, связанной с электроном, равна

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{r \Delta \varphi}{v}.$$

Так как  $r = v/\omega$ , то

$$\Delta t \approx \frac{2}{\gamma \omega}.$$

Во время вспышки электрон движется в сторону наблюдателя, поэтому в системе, связанной с наблюдателем, длительность вспышки будет короче на время, требуемое свету на прохождение расстояния между точками 1 и 2, т.е. на время  $\Delta s/c$ . Значит

$$\Delta t_{obs} = \Delta t \left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

Так как

$$\left(1 - \frac{v}{c}\right) \left(1 + \frac{v}{c}\right) = 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2} \quad \text{и} \quad \left(1 + \frac{v}{c}\right) \approx 2 \quad \text{при} \quad v \approx c,$$

то

$$\left(1 - \frac{v}{c}\right) \approx \frac{1}{2\gamma^2}.$$

Значит

$$\Delta t_{obs} \approx \frac{1}{\gamma^3 \omega}.$$

Наблюдаемая длительность вспышки на фактор  $\gamma^2$  короче длительности вспышки в системе, связанной с электроном и определяемой циклотронной частотой  $\omega$ . Поскольку длительность отдельной вспышки очень мала, то это значит, что спектр излучения очень широк, и наблюдатель практически видит непрерывное излучение.

Зависимость мощности излучения электрона с энергией  $E$  от частоты определяется выражением [190]:

$$P(\nu, \nu_c) = \sqrt{3} \frac{q^3 H}{m_0 c^2} F\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right), \quad (1.15)$$

где критическая частота  $\nu_c$  равна

$$\nu_c = \frac{3}{4\pi} \frac{qH}{m_0 c} \gamma^2, \quad (1.16)$$

функция  $F(x)$ ,  $x = \nu/\nu_c$  имеет вид ([190], 6.34)

$$F(x) \sim \frac{4\pi}{\sqrt{3}\Gamma(1/3)} \left(\frac{x}{2}\right)^{1/3}, \quad x \ll 1 \quad (1.17)$$

$$F(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sqrt{x}, \quad x \gg 1.$$

Максимум излучения приходится на частоту  $\nu_m \approx 1/(2\pi\Delta t)$  или

$$\nu_m \approx \frac{1}{3}\nu_c = \frac{1}{4\pi} \frac{qH}{m_0 c} \gamma^2 = 1.4 \cdot 10^6 \left(\frac{H}{\text{Гс}}\right) \gamma^2 [\text{Гц}].$$

Спектр излучения ансамбля релятивистских электронов будет зависеть от распределения электронов по энергиям.

Из наблюдений космических лучей следует, что распределение электронов по энергиям аппроксимируется степенной функцией:

$$N(E)dE = K E^{-\delta} dE, \quad (1.18)$$

где  $K$  и  $\delta$  — постоянные, причем  $\delta > 0$ . Здесь  $N(E)dE$  — число электронов в единице объема и единице телесного угла, движущихся в направлении наблюдателя, чьи энергии лежат в диапазоне от  $E$  до  $E + dE$ . Часто предполагают, что аппроксимация (1.18) справедлива в диапазоне энергий  $E_1 < E < E_2$  (при  $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$ ).

Тогда мощность, излучаемая ансамблем релятивистских электронов единичного объема с энергиями от  $E$  до  $E + dE$  в единичной полосе частот в единице телесного угла, будет равна

$$W(\nu) = \int_{E_1}^{E_2} P(\nu, \nu_c) N(E) dE = \int_{E_1}^{E_2} P(\nu, \nu_c) K E^{-\delta} dE, \quad (1.19)$$

где  $P(\nu, \nu_c)$  определяется формулой (1.15). В выражение (1.15) для мощности излучения электрона энергия  $E$  (или параметр  $\gamma$ ) входит через критическую частоту  $\nu_c$ :

$$\nu_c = \mu E^2, \quad \mu = \frac{3}{4\pi} \frac{qH}{m_0^3 c^5}.$$

Делая замену переменной  $x = \nu/(\mu E^2)$ ,  $dE = -\frac{1}{2\sqrt{\mu}} \nu^{1/2} x^{-3/2} dx$  в (1.19) и учитывая (1.17), получим

$$W(\nu) \sim \nu^{(1-\delta)/2} \int_{x_1}^{x_2} F(x) x^{(\delta-3)/2} dx.$$

Пусть

$$n = \frac{\delta - 1}{2}. \quad (1.20)$$

Тогда

$$W(\nu) \sim \nu^{-n} \int_{x_1}^{x_2} x^{n-1} F(x) dx.$$

Вводя функцию  $Q$ , равную

$$Q(n, \nu/\nu_c) = \int_{\nu/\nu_c}^{\infty} x^{n-1} F(x) dx,$$

получим

$$W(\nu) \sim \nu^{-n} [Q(n, \nu/\nu_1) - Q(n, \nu/\nu_2)].$$

Если  $\nu/\nu_2 \ll x \ll \nu/\nu_1$ , то функция  $Q$  не зависит от частоты и

$$W(\nu) \sim \nu^{-n}. \quad (1.21)$$

Если  $\alpha$  — спектральный индекс синхротронного излучения, то  $\alpha = -n = -(\delta - 1)/2$ . Типичные значения  $\alpha$  лежат в диапазоне от  $-0,5$  до  $-1,0$ , а  $\delta$  от  $2$  до  $3$ .

На частотах  $\nu > \nu_2$  спектральная плотность синхротронного излучения падает экспоненциально, на частотах  $\nu < \nu_1$  спектральный индекс имеет величину  $1/3$  (1.17). Следовательно, теоретически возможно исследовать распределение электронов по энергиям, т.е. функцию (1.18), по форме спектра синхротронного излучения. Это следует из того, что показатель  $\delta$  степенной функции (1.18) связан с спектральным индексом  $\alpha$  и  $n$  (1.20), а уровни энергии  $E_1$  и  $E_2$  связаны с критическими частотами  $\nu_1$  и  $\nu_2$  посредством (1.16).

Однако использование такого метода не дало результатов. Во-первых, завал в высокочастотной области спектра, который мог бы быть интерпретирован как завал в функции распределения энергии релятивистских электронов, не наблюдается. Во-вторых, интерпретация завала в низкочастотной области спектра затрудняется из-за незнания величины оптической толщины среды. Возможно также поглощение синхротронного излучения межзвездной плазмой. При большой концентрации электронов необходимо учитывать и самопоглощение ими синхротронного излучения.

В случае, если синхротронное излучение возникает в области, где магнитное поле постоянно по напряженности и по направлению, то интенсивность излучения равна ([140], §1.26):

$$\begin{aligned} I(\nu) = LW(\nu) &= KLa(n) \frac{\sqrt{3}}{8\pi} \frac{q^3}{m_0 c^2} \left( \frac{3q}{4\pi m_0^3 c^5} \right)^n H^{n+1} \nu^{-n} \approx \\ &\approx 0,933KL\alpha(n) H^{n+1} \left( \frac{6,26 \times 10^9}{\nu [\text{ГГц}]} \right)^n \frac{\text{ян}}{\text{рад}^2}, \end{aligned}$$

где  $L$  — размер излучающей области вдоль линии зрения, функция  $a(n)$  имеет вид

$$a(n) = 2^{n-1} \frac{n+5/3}{n+1} \Gamma\left(\frac{3n+1}{6}\right) \Gamma\left(\frac{3n+5}{6}\right).$$

Движущийся электрон может не только излучать энергию, но и поглощать ее. Если плотность электронов высока, т.е. облако оптически толстое, то эффект поглощения существенно меняет характер принимаемого наблюдателем спектра.

На низких частотах при  $\nu < \nu_1$  спектральный индекс синхротронного излучения имеет величину  $1/3$  (1.17). Однако, если облако оптически толстое, то на частотах  $\nu$ , меньших некоторой критической частоты  $\nu_s$ , для которой оптическая толщина  $\tau = \alpha_\nu L$  равна единице, спектральный индекс равняется  $\alpha = 2,5$  ([140], §1.28). Коэффициент поглощения  $\alpha_\nu$  можно оценить из выражения

$$\alpha_\nu \approx 0,019(3,5 \times 10^9)^{2n+1} K H^{n+3/2} \nu^{-(n+5/2)} \text{см}^{-1}.$$

На частотах  $\nu > \nu_s$  имеем  $\alpha = -(\delta - 1)/2$ .

Критическая частота (в МГц) может быть найдена по формуле

$$\nu_s \approx 34 \left( \frac{S}{\theta^2} \right)^{2/5} H^{1/5} (1+z)^{1/5},$$

$S$  — плотность потока в ян,  $\theta$  — угловой размер источника в секундах дуги,  $H$  — в Гс,  $z$  — красное смещение. Из измерений спектров и определения

критической частоты  $\nu_s$  следует, что характерная величина магнитного поля равна  $H = 10^{-4\pm 1}$  Гс.

Важными особенностями обладает поляризация синхротронного излучения. Для наблюдателя, находящегося точно в плоскости орбиты электрона, излучение поляризовано линейно с электрическим вектором, лежащим в плоскости орбиты (рис. 1.6). На некотором угловом расстоянии от этой плоскости поляризация эллиптическая, причем разных знаков по обе стороны от плоскости. Кроме того, интенсивность эллиптически поляризованного излучения незначительна. При усреднении излучения системы электронов остается лишь линейная поляризация. Степень поляризации излучения равна

$$p = \frac{\delta + 1}{\delta + \frac{7}{3}} = \frac{n + 1}{n + \frac{5}{3}}$$

(69% при  $\delta = 2$ ). Иными словами, система релятивистских электронов, находящаяся в однородном магнитном поле, дает линейно поляризованное синхротронное излучение с электрическим вектором, перпендикулярным магнитному полю. Поэтому измерения спектральной интенсивности и поляризации синхротронного излучения позволяют получить информацию о концентрации и энергетическом спектре релятивистских электронов, величине и направлении магнитных полей во Вселенной.

## 1.4 Структура квазаров

### 1.4.1 Линейные и угловые расстояния в космологии

В первую очередь нас будет интересовать структура квазаров, наиболее удаленных источников излучения во Вселенной. Именно фактор удаленности квазаров от наблюдателя явился определяющим при их выборе в качестве опорных объектов, координаты которых фиксируют систему координат на небе. Ожидаемые малые собственные движения квазаров приводят к выводу, что система координат, построенная на их координатах, будет почти инерциальной. Вторым и третьим факторами были компактность квазаров и мощность излучения в радиодиапазоне. Точность определения координат радиоисточников на РСДБ в 80-е годы прошлого века значительно превзошла точность оптических методов, что и определило выбор Международного астрономического союза в пользу системы координат на небе, фиксируемой квазарами [114]. В 1995 г. был опубликован первый каталог ICRF1 [157] — первая реализация небесной системы координат (НСК), в 2009 г. каталог ICRF2 [158] — вторая реализация НСК.

Однако развитие технологии РСДБ, а также накопленные данные за 30 лет наблюдений на РСДБ, позволяют сделать важные выводы. Во-первых, квазар является сложным физическим объектом, «не точкой», как хотелось бы астрометристам. Радиоизлучение происходит из некоторой области джета, которая движется как внутри джета, так и с самим джетом. Иными словами радиоисточником, которому приписаны координаты в каталоге ICRF, является некоторая область джета. Во-вторых, радиояркость областей джета меняется в зависимости от частоты излучения, что приводит к зависимости координат области или «радиоисточника» от частоты.

В 60-е годы несколько мощных источников радиоизлучения были отождествлены в оптике с квазизвездными объектами. Хотя эти объекты выглядели как звезды на фотопластинках, они имели странные эмиссионные линии, которые не наблюдались у обычных звезд. Покрытие Луной «квазизвездного радиоисточника» 3С 273 позволило в 1963 г. определить его точные координаты [105]. Вскоре М. Шмидт [199] идентифицировал 3С 273 с звездообразным объектом 13-й звездной величины и доказал по результатам наблюдений этого источника, что странные линии в спектре являются эмиссионными линиями водорода, но смещенными из-за красного смещения, равного  $z = 0,158$ , в «красную» область спектра.

Таким образом, было доказано, что квазары являются внегалактическими объектами. Следовательно, при описании движения в квазарах нам необходимо применять формулы с учетом того, что квазары и наблюдатель находятся в расширяющейся Вселенной.

Рассматривая фоновое пространство-время, ограничимся стандартной моделью [11] расширяющейся Вселенной, доминированной нерелятивистским веществом, с учетом вклада  $\Lambda$ -члена. Метрика стандартной модели – метрика Фридмана:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left( d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 \right).$$

Здесь  $t$  – физическое время, а  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\zeta$  – лагранжевы пространственные координаты.

Масштабный фактор  $a(t)$  в момент времени  $t$  определяется из уравнения Фридмана, и зависимость масштабного фактора от времени есть:

$$a(t) = \left( \frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda} \right)^{1/3} \text{sh}^{2/3} \left[ \frac{3}{2} H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda} t \right].$$

Кроме того, мы выбираем значения основных космологических параметров в соответствии со стандартной космологической моделью:  $a(t_0) = a_0 =$

1 – значение масштабного фактора в современный момент времени,  $\Omega_m = 0,272 \pm 0,016$  – параметр плотности барионного и темного вещества,  $\Omega_\Lambda = 0,728 \pm 0,016$  – параметр плотности темной энергии. Полная плотность равна  $\rho$ , критическая плотность –  $\rho_c = 3H_0^2/(8\pi G)$ , их отношение равно  $\Omega = \rho/\rho_c$ , современная постоянная Хаббла  $H_0 = 70,4 \pm 1,4$  км/сек/Мпс [208, 122, 141]. Изменение постоянной Хаббла со временем определяется выражением  $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$ .

Так как суммарная величина параметра  $\Omega$  равна  $1,0023 \pm 0,0056$  (Таблица 8 [122]), то наша Вселенная вероятнее всего имеет плоскую геометрию.

Красное смещение квазара будем обозначать как  $z = a(t_0)/a(t_{em}) - 1$ , здесь  $t_{em}$  – момент излучения света. Частота принимаемого излучения  $\nu_{obs}$  смещена за красное смещение:

$$\nu_{obs} = \nu_{em}/(1 + z), \quad (1.22)$$

$\nu_{em}$  – частота излучения в системе, связанной с квазаром. Кроме смещения наблюдаемой частоты происходит также удлинение интервалов времени

$$t_{obs} = (1 + z)t_{em}. \quad (1.23)$$

Расстояние  $R_A$  от наблюдателя до некоторого внегалактического объекта, определяемое как функция красного смещения  $z$  этого объекта в современный момент времени, находится из уравнения (см., например, [11]):

$$R_A = c \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (1.24)$$

Нижний предел интегрирования показывает, что наблюдатель находится при  $z = 0$ . Верхний предел интегрирования означает красное смещение объекта, равное  $z$ . Параметр Хаббла есть функция масштабного фактора, а, следовательно, и красного смещения, которая в стандартной космологической модели имеет вид:

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_m(1 + z)^3 + \Omega_\Lambda}. \quad (1.25)$$

Пусть  $\theta$  – угол, под которым виден источник с линейным размером  $L$ . Если расстояние до него равно  $R$ , то в евклидовой геометрии (при  $R \gg L$ )  $\theta = L/R$ . При увеличении  $R$  и постоянном  $L$  угол  $\theta$  стремится к нулю.

В искривленном пространстве вместо  $R_A$  используется угловое расстояние; обозначим его как  $D_A$ . Тогда  $\theta = L/D_A$  [221]. Угловое расстояние

равно

$$D_A(z) = \frac{R_A}{1+z} = \frac{c}{H_0(1+z)} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_m(1+z')^3 + \Omega_\Lambda}}.$$

При  $z \ll 1$  угловое расстояние увеличивается пропорционально красному смещению:

$$D_A(z) \approx \frac{cz}{H_0},$$

т.е. величина угла  $\theta$  уменьшается. При больших красных смещениях ( $z \gg 1$ ) угловое расстояние уменьшается:

$$D_A(z) \approx \frac{c}{H_0\sqrt{\Omega_m}} \frac{1}{1+z} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right),$$

т.е. величина угла  $\theta$  увеличивается. Максимальное значение  $D_A$  достигается в указанной космологической модели при  $z \approx 1,65$ ; при этом источник с линейным размером 1 пс имеет минимальный угловой размер:  $\theta \approx 116$  мкс дуги. Это значит, что коэффициент пересчета угловых расстояний в линейные составляет  $s \approx 8,62$  пс  $\cdot$  (мс дуги) $^{-1}$ . Зависимость  $\theta$  от красного смещения показана на рис. 1.7.

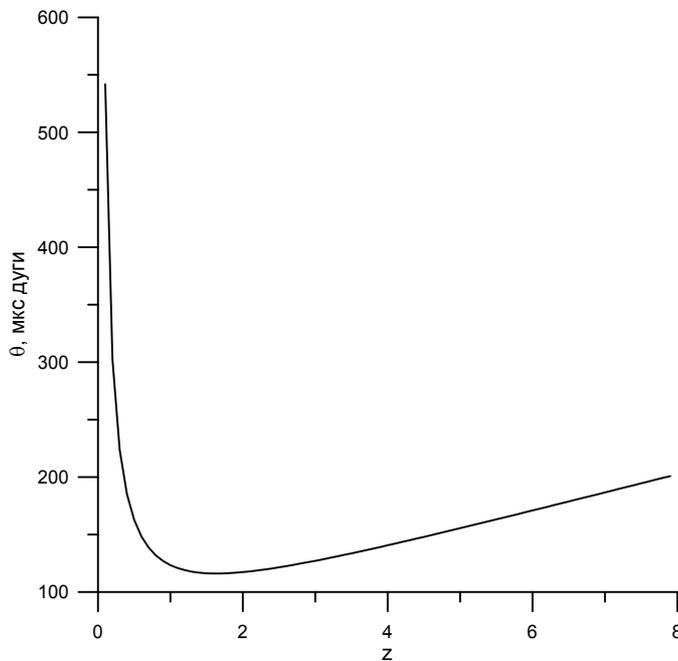


Рис. 1.7: Изменение углового размера источника в зависимости от красного смещения.

## 1.4.2 Релятивистские эффекты в квазарах

### Релятивистский эффект Доплера

Пусть излучающее на частоте  $\nu_{em}$  тело  $S$  движется с пекулярной скоростью  $v$  под углом  $\psi$  к линии, соединяющей неподвижного наблюдателя и это тело. Если  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, направленный от наблюдателя  $O$  к источнику  $S$ , то  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = v \cos \psi$ ,  $v = |\mathbf{v}|$  (рис. 1.8).

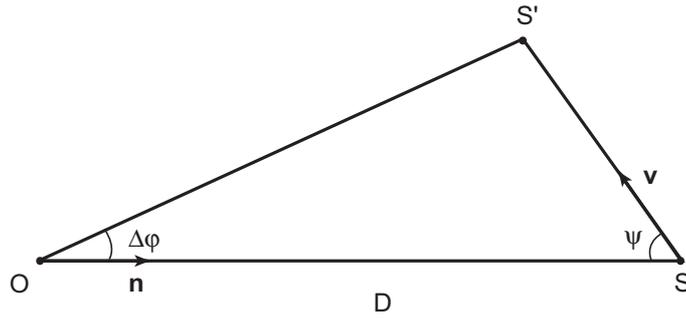


Рис. 1.8: Геометрия движения источника относительно наблюдателя.

Тогда из преобразований Лоренца следует, что промежутку времени в системе тела  $\Delta t'$  соответствует промежуток  $\Delta t$  в системе, связанной с наблюдателем:

$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$  — фактор Лоренца,  $\beta = v/c$ . Пусть промежуток времени  $\Delta t'$  — это период волны, соответствующей частоте излучения  $\nu'$ , т.е.  $\Delta t' = 1/\nu'$ . За время  $\Delta t$  источник переместится на расстояние  $s = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta t$ , и фотоны, излученные с интервалом  $\Delta t'$ , будут приняты наблюдателем через промежуток времени  $\Delta \tilde{t}$ , причем

$$\Delta \tilde{t} = \Delta t - \frac{s}{c} = \Delta t \left( 1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c} \right),$$

что соответствует принимаемой частоте

$$\nu_{obs} = \frac{1}{\Delta \tilde{t}} = \frac{\nu'}{\gamma \left( 1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c} \right)} = \nu' \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \psi} = \mathcal{D} \nu', \quad (1.26)$$

где  $\mathcal{D} = 1/\left[\gamma \left( 1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c} \right)\right]$  — фактор Доплера.

В расширяющейся Вселенной полная скорость источника складывается из хаббловской скорости и пекулярной скорости, т.е. необходимо учесть

смещение частоты в расширяющейся Вселенной (1.22). В результате получим:

$$\nu_{obs} = \nu_{em} \frac{1}{\gamma(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c})} \frac{1}{1+z} = \nu_{em} \mathcal{D} \frac{1}{1+z}, \quad (1.27)$$

где  $z$  – красное смещение источника.

### Сверхсветовые движения в квазарах

Для объяснения такого явления как сверхсветовые движения излучающих областей в джетах квазаров обратимся к рис. 1.8. Пусть точка  $S$  – положение такой области в некоторый момент времени. Через промежуток времени  $\Delta t'$  эта область, движущаяся со скоростью  $\mathbf{v}$ , перемещается в точку  $S'$ . Тогда ее угловое перемещение для наблюдателя, находящегося на расстоянии  $D$  равно

$$\Delta\varphi = \frac{v\Delta t' \sin\psi}{D}.$$

Наблюдатель регистрирует перемещение излучающей области в точку  $S'$  из  $S$  за промежуток времени  $\Delta t$ :

$$\Delta t = \Delta t' - \beta\Delta t' \cos\psi = \Delta t'(1 - \beta \cos\psi).$$

Значит видимая трансверсальная скорость движения излучающей области джета равна

$$v_{app} = D \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

или

$$\beta_{app} = \frac{v_{app}}{c} = \frac{\beta \sin\psi}{1 - \beta \cos\psi}.$$

В векторном виде получим ( $\beta_{app} = \mathbf{v}_{app}/c$ ,  $\beta = \mathbf{v}/c$ ):

$$\beta_{app} = \frac{\mathbf{n} \times [\beta \times \mathbf{n}]}{1 - \beta \cdot \mathbf{n}}. \quad (1.28)$$

Функция  $\beta_{app}$  в зависимости от угла  $\psi$  для разных значений фактора Лоренца  $\gamma$  показана на рис. 1.9. Из рисунка видно, что при  $\gamma > 4$  практически при всех углах  $\psi$  будет наблюдаться сверхсветовое трансверсальное движение источника ( $\beta_{app} > 1$ ).

Решение уравнения

$$\frac{d\beta_{app}}{d\psi} = 0$$

дает  $\cos\psi_{max} = \beta$  и  $\beta_{app,max} = \beta\gamma$ . Из последнего выражения следует, что, если наблюдается источник с  $\beta_{app} = 10$ , то скорость его в джете должна

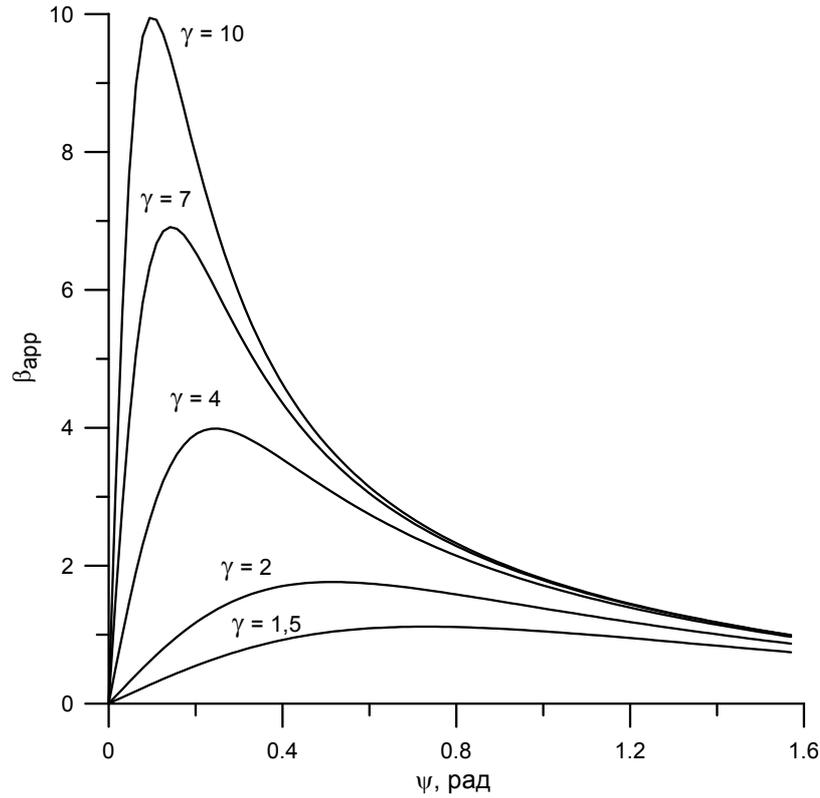


Рис. 1.9: Видимое сверхсветовое движение источника при  $\gamma = 1, 5; 2; 4; 7; 10$ .

быть такова, что  $\gamma > 10$ . Если  $\beta_{app} < \beta_{app,max}$ , то возможны два значения угла  $\psi$ . Предполагая, что джет обладает конической формой с углом раскрытия  $\phi \approx 1/\gamma$ , то решением считается наименьшее значение  $\psi$ :  $\psi \approx 1/\gamma$ .

В расширяющейся Вселенной наблюдаемая угловая скорость перемещения по небу равна (1.28),(1.24):

$$\mu_{obs} = \frac{\mathbf{n} \times [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{n}]}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}} \cdot \frac{1}{(1+z)} \cdot \frac{1}{R_A}. \quad (1.29)$$

Здесь дополнительный делитель  $1+z$  возник из-за удлинения интервалов времени (1.23).

### Изменение плотности потока

Наблюдаемая плотность потока  $S_\nu$  от источника, движущегося в сторону наблюдателя, будет больше плотности потока, измеренной в системе источника, из-за релятивистского эффекта Доплера. Как показано в [190] отношение

$$\frac{S_\nu}{\nu_{obs}^3}$$

инвариантно при преобразовании Лоренца. Так как  $\nu_{obs} = \mathcal{D}\nu'$  (1.26), то наблюдаемая плотность потока  $S_\nu$  выражается через плотность потока  $S'_\nu$  в движущейся системе согласно выражению

$$S_\nu = \mathcal{D}^3 S'_\nu,$$

что называется доплеровским усилением. Так как усиление пропорционально кубу фактора Доплера, то, например, при  $\beta = 0,98$ ,  $\gamma \approx 5$   $\mathcal{D} \approx 10$  плотность потока источника, движущегося в сторону наблюдателя будет в 1000 раз больше плотности потока в системе, связанной с источником. Наоборот, плотность потока источника, движущегося от наблюдателя будет в 1000 раз меньше. Поэтому чувствительности интерферометров не хватает для обнаружения джетов, движущихся в сторону от наблюдателя.

Так как частота принимаемого излучения увеличивается согласно выражению  $\nu_{obs} = \mathcal{D}\nu'$ , то необходимо учесть изменение плотности потока с изменением частоты ( $S_\nu \sim \nu_{obs}^\alpha$ ) (см. (1.21)). Как указывалось выше, спектральный индекс синхротронного излучения  $\alpha$  меняется в диапазоне от  $-0,5$  до  $-1,0$ .

В результате, доплеровское усиление равно

$$S_\nu = \mathcal{D}^{3-\alpha} S'_\nu.$$

### 1.4.3 Механизм генерации джета

Наиболее эффективным способом высвобождения энергии является аккреция (падение) вещества на компактное, массивное тело. В настоящее время принято считать, что таким телом может быть сверхмассивная черная дыра (СМЧД). Также принято считать, что аккреция вещества на СМЧД является основным механизмом или «центральной машиной» генерации излучения не только в квазарах, но и в активных галактических ядрах [44].

Характеристический размер черной дыры определяется шварцшильдовским радиусом  $R_{sch}$ , который находится из условия равенства скорости убегания  $v$  частицы из сферы притяжения тела массы  $M$  и радиуса  $R$  скорости света  $c$ , т.е.

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

и из  $v = c$  следует, что

$$R_{sch} = \frac{2GM}{c^2} \approx 3 \text{ [км]} \cdot \frac{M}{M_\odot},$$

$M_{\odot}$  — масса Солнца.

При падении газа на черную дыру образуется аккреционный диск. Частицы диска при столкновениях теряют кинетическую энергию, которая трансформируется в нагрев диска, и опускаются, пока не падают в черную дыру. Нагретый диск излучает, главным образом, в видимых и ультрафиолетовых лучах, а энергия излучения связана со скоростью падающего на черную дыру вещества (рис. 1.10). В диске могут образовываться плотные облака, в которых создаются условия для генерации мазерного излучения, как, например, в галактике NGC 4258 [107].

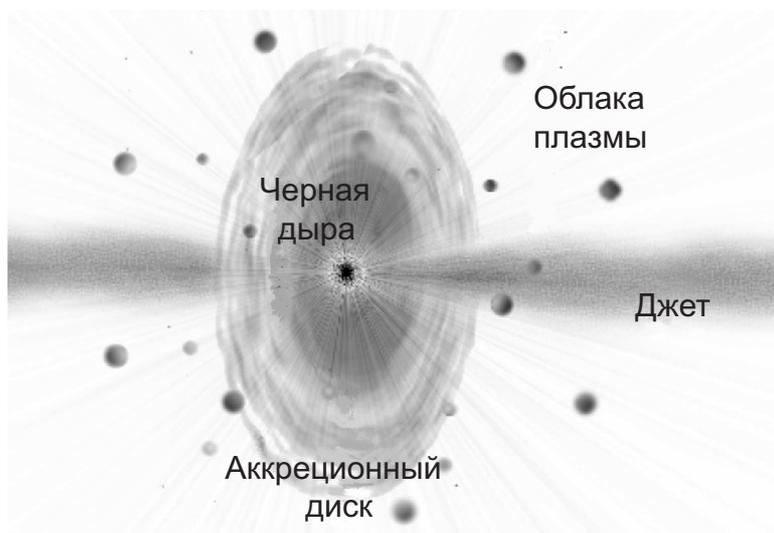


Рис. 1.10: Схематичное изображение квазара.

Происхождение релятивистского, сильно коллимированного потока частиц (джета) связано с магнитогидродинамическими процессами во внутренних частях аккреционного диска и/или с быстрым вращением черной дыры. Магнитогидродинамические модели релятивистской струи изучались в большом количестве работ, начиная с пионерской работы Блендфорда и Знайека [47] (см. также [1, 46, 93, 154, 60]).

В этих моделях движение горячей плазмы в диске порождает полоидальное магнитное поле. Из-за дифференциального вращения слоев диска линии полоидального магнитного поля закручиваются, так как линии «вморожены» в плазму. Таким образом генерируется тороидальное магнитное поле  $B_{tor}$ , которое с силой  $F_{pinch} = B_{tor}^2 / (4\pi R)$ , направленной к оси джета, сжимает джет ( $R$  — радиус силовой линии). По мере удаления от черной дыры радиус  $R$  увеличивается, и магнитное давление уменьшается. Это приводит к значительному градиенту давления вдоль оси джета, который ускоряет поток частиц [215].

В данной модели ускорения частиц угловая ширина джета обратно пропорциональна фактору Лоренца  $\gamma$ , что подтверждается наблюдениями [126]. У некоторых квазаров частицы ускоряются до  $\gamma > 10$  и коллимируются в пучок с углом раскрыва  $\phi < 1^\circ$  на расстоянии до 1 пс от центральной машины.

Частица с массой  $m$ , которая падает с бесконечно большого расстояния на расстояние  $R$  от тела с массой  $M$ , получает энергию

$$U = \frac{GMm}{R}.$$

В случае черной дыры падающее вещество будет излучать до достижения шварцшильдовского радиуса  $R_{sch}$ . Если гравитационная энергия преобразуется в излучение с коэффициентом  $\eta$ , то светимость будет определяться скоростью аккреции  $\dot{m}$  из формулы:

$$L = \eta \dot{U} = \frac{GM}{R_{sch}} \frac{dm}{dt} = \frac{1}{2} \eta \dot{m} c^2.$$

или

$$L = 10^{46} \frac{\text{эрг}}{\text{с}} \left( \frac{\eta}{0,1} \right) \left( \frac{\dot{m}}{M_\odot \text{ год}^{-1}} \right)$$

Генерация излучения происходит в основном в области размером  $10R_{sch}$ , т.е. с площади  $A = \pi(10R_{sch})^2$ . Если предположить, что излучение — это излучение черного тела, то по закону Стефана–Больцмана (1.4) получим

$$B = \sigma T^4, \quad L = B \cdot A,$$

или

$$T = \left( \frac{L}{\sigma A} \right)^{1/4} = 1,6 \times 10^5 \text{ К} \left( \frac{\dot{m}}{M_\odot \text{ год}^{-1}} \right)^{1/4} \cdot \left( \frac{M}{10^8 M_\odot} \right)^{-1/2}.$$

При скорости аккреции  $\dot{m} = 1 M_\odot \text{ год}^{-1}$ , массе черной дыры  $M = 10^8 M_\odot$  температура диска будет порядка  $10^5 \text{ К}$  и излучение будет иметь максимум в ультрафиолетовой области спектра (рис. 1.5). Светимость равна  $10^{46} \text{ эрг} \cdot \text{с}^{-1}$  при  $\eta = 0,1$ . Из этих оценок следует, что, если в центральной области галактики, где расположена СМЧД, имеется менее  $10^{10} M_\odot$  вещества, то время жизни квазара ограничено несколькими миллиардами лет.

Изучение структуры джета квазара является одной из интереснейших задач астрофизики. Как показано ниже, эта структура достаточно сложна и состоит из ядра джета (в англоязычных статьях используется термин «core»), нескольких узлов («knots»).<sup>1</sup> Решение этой задачи тесно связано

<sup>1</sup>Термин «ядро джета» следует понимать как некоторую область вблизи основания джета, внутри которой происходит генерация радиоизлучения, и среда является оптически тонкой. Ближе к основанию джета среда оптически толстая.

с определением термина «радиоисточник», который используют астрономы. Строго говоря координаты, которые приписаны радиоисточнику в каталогах ICRF1 и ICRF2, относятся к центру яркости ядра джета на частоте наблюдений 8 ГГц.

В качестве примера рассмотрим структуру самого близкого и потому наиболее исследованного квазара 3С 273.

Используя уравнение (1.24) и определение параметра Хаббла (1.25), получим, что квазар 3С 273 находится на расстоянии около 626 мегапарсек (Мпс). Так как его звездная величина равна  $m_B = 13,1$ , то светимость должна быть  $L = 2 \times 10^{46}$  эрг/с или  $5 \times 10^{12} L_\odot$ . Так как светимость квазара 3С 273 и других меняется на интервале порядка одного года, то и размер излучающей области должен быть менее одного светового года.

Структура квазара 3С 273 показана на рис. 1.11. Данный рисунок является комбинацией наблюдений, выполненных в разных частотных диапазонах. Хорошо видно, что с уменьшением частоты, максимум излучения сдвигается вправо от центральной машины; в радиодиапазоне максимальной яркостью обладает ядро джета, помеченное как Н2. Коэффициент пересчета угловых расстояний в линейные при  $z = 0,158$  составляет  $s \approx 2,73 \text{ пс} \cdot (\text{мс дуги})^{-1}$ , т.е. линейный размер области Н2 составляет около 2,5 кпс.

Рассмотрим сначала в качестве радиоисточника стационарный джет. Будем считать, что он является узким и обладает конической формой с углом раскрытия  $\phi$ , ось которого имеет угол  $\psi$  с направлением на наблюдателя (рис. 1.8). Плазма в джете течет с постоянной скоростью  $v = \beta c$ . Будем также полагать, что фактор Лоренца релятивистской плазмы есть  $\gamma$ , а фактор Доплера есть  $\mathcal{D}$ . Расстояние от начала джета до самой яркой точки (ядра) джета определяется согласно формуле [45]:

$$\frac{r_s}{\text{пс}} \approx \frac{3}{1+z} \cdot f \cdot \frac{L_{44}^{2/3}}{\gamma^{4/3} \beta^{2/3}} \mathcal{D}^{2/3} \frac{1}{\nu}. \quad (1.30)$$

Здесь  $z$  – красное смещение квазара,  $L_{44}$  – полная мощность джета (включая радиоизлучение, кинетическую и тепловую энергии джета) в единицах  $10^{44}$  эрг/с,  $\nu$  – частота наблюдения (в ГГц). Кроме того, введен множитель  $f$ , который зависит от свойств плазмы, составляющей джет, и геометрических характеристик самого джета [45]. Величина  $r_s$  (1.30) слабо зависит от характеристик джета, определяющим параметром является фактор Доплера.

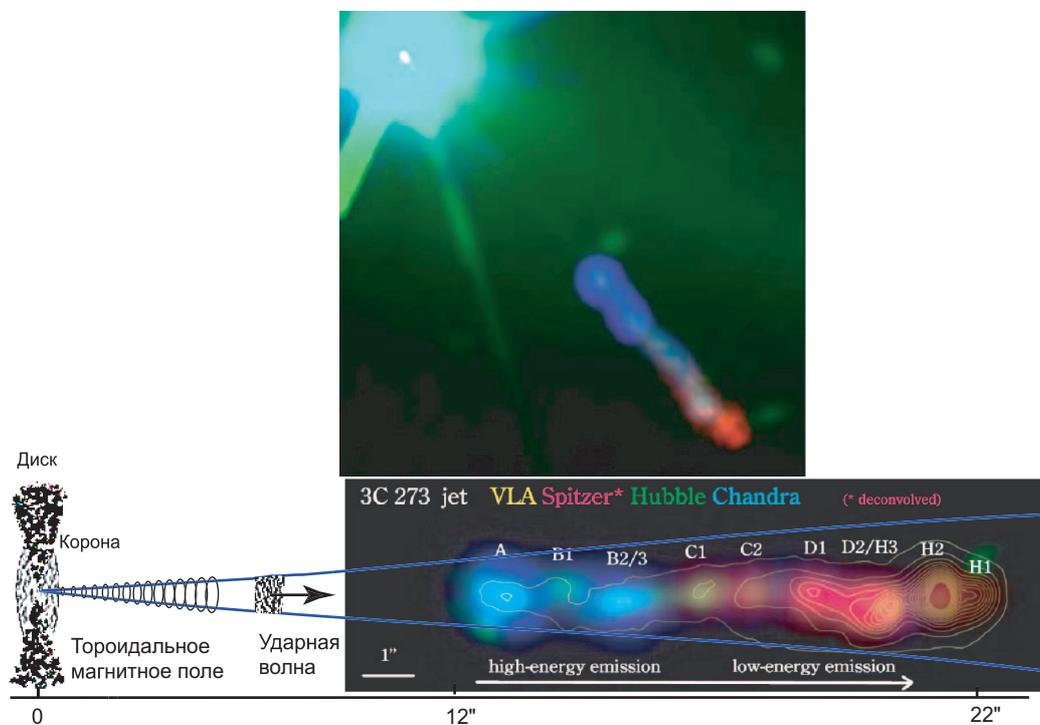


Рис. 1.11: Квазар 3С 273 и джет. а) Изображение в ложных цветах квазара 3С 273 и джета (принцип кодирования цветов описан ниже). Квазар расположен слева вверху и является очень компактным и ярким источником. Вуаль вокруг квазара образуется из-за насыщения пикселей ПЗС-матрицы из-за яркости источника; б) Изображение в ложных цветах джета, показывающее в каких диапазонах спектра излучают различные области джета: голубой цвет — X-лучи (по данным Chandra), зеленый цвет — оптический диапазон (по данным Hubble Space Telescope и Spitzer Space Telescope), красный цвет — радиодиапазон (по данным VLA). Желтым цветом отмечены области, которые излучают и в оптическом, и в радиодиапазонах. Характер излучения меняется в зависимости от диапазона: изображение в X-лучах быстро слабеет по мере удаления от ядра квазара, радиоизлучение наоборот растет, оптическое излучение почти постоянно, но выделяются отдельные фрагменты (детали см. [123, 213]).

Сделаем, вслед за авторами [45], замечание, особенно важное для радиоастрономии. Поскольку

$$r_s \sim \frac{1}{\nu},$$

то ядро джета, неразрешенное на интерферометре на данной частоте  $\nu$ , будет являться неразрешенным на всех частотах. Расстояние до ядра растет пропорционально длине волны ( $\lambda = c/\nu$ ). При наблюдении на меньшей длине волны расстояние до ядра уменьшается. Разрешение (минимально разрешимое угловое расстояние) радиоинтерферометра также растет пропорционально длине волны:

$$\theta_{ang} \sim \frac{\lambda}{B},$$

где  $B$  – размер базы интерферометра. При наблюдении на меньшей длине волны повышается разрешающая способность радиоинтерферометра, т.е. уменьшается минимально разрешимый угол  $\theta_{ang}$ , но и линейное расстояние от основания джета до ядра также уменьшается.

Зависимость между  $r_s$  и разрешением радиоинтерферометра не зависит от длины волны:

$$r_s \sim B\theta_{ang}.$$

Так, если при данной базе  $B$  расстояние от начала джета до горячего пятна  $r_s$  является неразрешимым размером, то повышать частоту наблюдения для разрешения частей радиоисточника не имеет смысла. Для изучения структуры радиоисточника необходимо увеличивать базу РСДБ, а не частоту наблюдения.

В зависимости от параметров плазмы и расстояния до источника можно ожидать величину  $r_s$  в интервале от нескольких сотен до тысяч пс. Это соответствует тому, что положение оптической компоненты квазара (что грубо соответствует положению начала джета) на небе может отличаться от положения источника радиоизлучения (положения максимальной яркости джета) в интервале от микросекунд дуги до десятков мс дуги.

На рис. 1.12 схематично показано изменение положения ядра джета в зависимости от частоты наблюдения. Считается, что ядро связано с областью джета, откуда на данной частоте к наблюдателю приходит излучение, т.е. с границей перехода между оптически толстой и оптически тонкой плазмой. На рис. 1.12 ядро наблюдается на частоте  $\nu_5$ .

Подтверждение теоретических выводов получено из наблюдений разных источников: 1038+528A [161], 4C 39.25 [102], 3C 395 [145]. В статье [152] (Table 1) приводятся расчетные значения величины смещения ядер

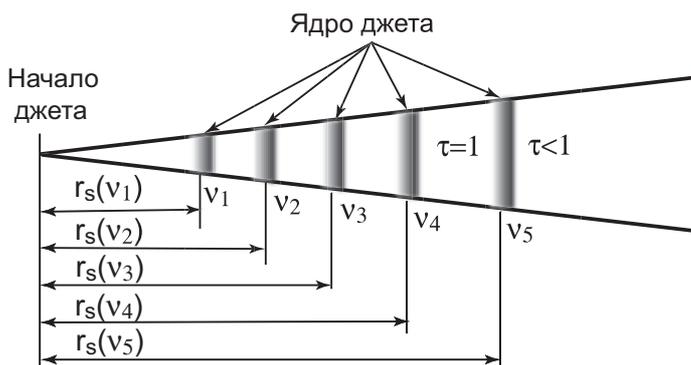


Рис. 1.12: Схематичное изображение изменения положения  $r_s$  ядра джета в зависимости от частоты ( $\nu_1 > \nu_2 > \nu_3 > \nu_4 > \nu_5$ ).

джетов  $\Delta r$  для нескольких квазаров при наблюдениях на частотах  $\nu_1 = 5$  ГГц и  $\nu_2 = 22$  ГГц, в частности, для 3С 273  $\Delta r = 0,78$  мс дуги, для 3С 216 — 0,70 мс дуги, 3С 120 — 0,61 мс дуги, 4С 39.25 — 0,57 мс дуги, 3С 345 — 0,37 мс дуги, 1807+698 — 0,26 мс дуги.

Каталоги ICRF1 [157] и ICRF2 [158], реализующие небесную систему координат, содержат координаты радиоисточников, наблюдавшихся в X-полосе (частота 8,4 ГГц). Предполагается, что на более высоких частотах источники будут более компактными (рис. 1.12). Поэтому считается, во-первых, их координаты могут быть измерены с более высокой точностью, во-вторых, положение ядер джетов на высоких частотах будет более стабильным. В работах [143, 70] приводятся каталоги источников ICRF, полученные на частотах 24 и 43 ГГц. В работе [120] сообщается о наблюдениях и каталоге источников на частоте 32 ГГц.

В то же время существует другое мнение [177]. В работе доказываются, что измерения групповой задержки не должны приводить к смещению координат при изменении частоты наблюдений.

Кроме построения более стабильной системы ICRF целью наблюдений на РСДБ на высоких частотах является выбор радиоисточников, наиболее подходящих для связи ICRF с будущей оптической системой GAIA [40, 51].

## Глава 2

# Основы радиоастрономии

Появление 400 лет назад оптического телескопа привело к значительному расширению наших знаний о Вселенной. Были обнаружены новые объекты в Солнечной системе, множество звезд, скоплений звезд, галактик, слишком слабых, чтобы их можно было увидеть невооруженным взглядом. В начале прошлого века было доказано, что звезды должны излучать не только в оптическом, но и в других диапазонах: от рентгеновского до радиоволнового.

В данной главе рассматриваются основные соотношения между физическими величинами, используемыми в радиоастрономии. К ним относятся яркость, плотность потока радиоисточника, диаграмма направленности радиотелескопа, шумовая и яркостная температура и другие. Более подробные сведения можно найти, например, в книгах [18, 32, 228].

### 2.1 Основные соотношения

Назовем радиотелескопом (антенной) устройство, собирающее электромагнитное излучение, которое приходит с некоторого направления, и преобразующее его в сигнал определенной мощности. Радиотелескоп состоит из зеркала, которое собирает и фокусирует радиоволны на облучатель, затем сигнал усиливается малошумящим усилителем и преобразуется по частоте для передачи по кабелю в лабораторный корпус.

Мощность сигнала на выходе радиотелескопа, как показано ниже, связана с параметрами источника и антенны. Несмотря на большие размеры антенн, используемых в радиоастрономии, мощность, регистрируемая от космических радиоисточников, очень мала. Поэтому на выходе радиотелескопа устанавливается высокочувствительный приемник (радиометр) для усиления поступающего излучения.

Пусть антенной является плоская площадка  $A$ , которая принимает излучение, приходящее из области неба под углом  $\theta$  к нормали  $\mathbf{n}$  к  $A$ .

Выделим на площадке  $A$  элемент  $dA$  и введем правую систему координат  $OXYZ$ , точка  $O$  — произвольная точка внутри  $dA$ . Ось  $OZ$  направим по нормали  $\mathbf{n}$ . Оси  $OX$ ,  $OY$ , таким образом, лежат в плоскости, совпадающей с  $A$ . Вместо прямоугольных координат  $x, y, z$  будем использовать сферические координаты  $\theta, \lambda$ , причем, полярное расстояние  $\theta$  отсчитывается от оси  $OZ$ , долгота  $\lambda$  от оси  $OX$  против часовой стрелки (рис. 2.1).

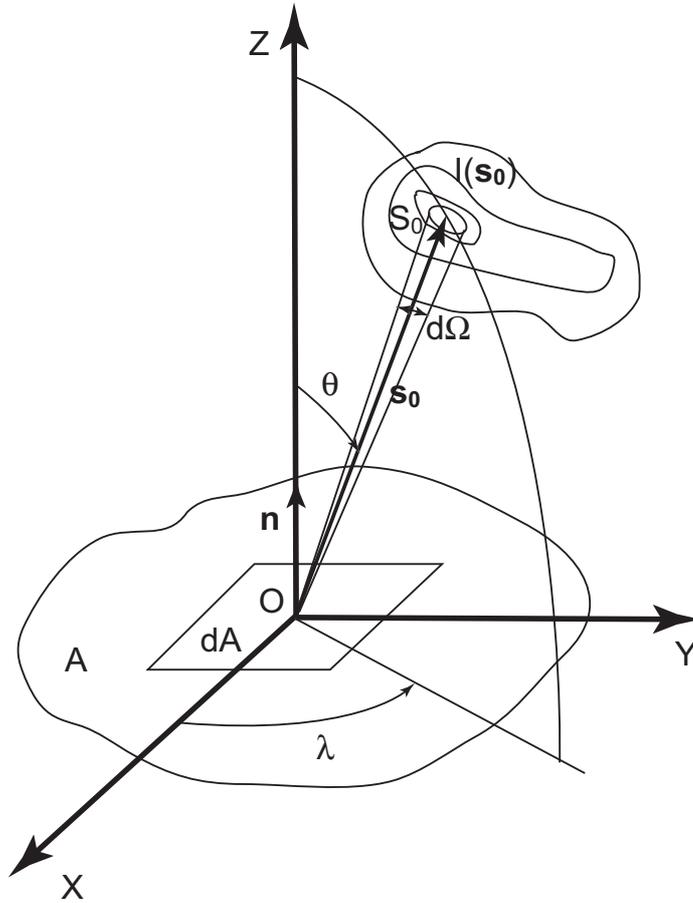


Рис. 2.1: Геометрия приема плоской площадкой излучения с направления  $\mathbf{s}_0$ .

Мощность  $dW$  электромагнитного излучения, собираемого элементом  $dA$  антенны  $A$  в полосе частот  $df$  в телесном угле  $d\Omega$ , стягивающем излучающую область, равна:

$$dW = I(\mathbf{s}_0, f) dA \cos \theta df d\Omega, \quad (2.1)$$

причем  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\lambda$ .

Величина  $I(\mathbf{s}_0, f)$  характеризует спектрально-угловое распределение интенсивности излучающей области и называется радиояркостью. Размерность радиояркости равна  $[\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{Гц} \cdot \text{ср})]$ . Направление на некоторую точку  $S_0$  излучающей области задается единичным вектором  $\mathbf{s}_0 = \mathbf{s}_0(\theta, \lambda)$ .

Интегрируя радиояркость по телесному углу, получим полную спектральную плотность потока радиоисточника  $S_s$ :

$$S_s(f) = \int_{\Omega} I(\mathbf{s}_0, f) d\Omega. \quad (2.2)$$

Плотность потока в общем случае зависит от частоты приема (см. стр. 25). Единицей потока является янский:  $1 \text{ ян} = 10^{-26} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{Гц}}$ .

Полная мощность на выходе приемника, собираемая площадкой  $A$  в полосе частот  $\Delta f$  из телесного угла  $\Omega$ :

$$W = \int_A \int_{\Omega} \int_{\Delta f} dW \quad (2.3)$$

или

$$W = \int_A \int_{\Omega} \int_{\Delta f} I(\mathbf{s}_0, f) dA \cos \theta K(f) d\Omega df,$$

где  $K(f)$  — спектральная характеристика приемника. В простейшем случае  $K(f) = 1$  для полосы частот  $(f - \Delta f/2, f + \Delta f/2)$  и  $K(f) = 0$  для других частот.

Если  $dW$  не зависит от положения элемента  $dA$  на поверхности  $A$ , то мощность, падающая на всю поверхность, равна

$$W = A \int_{\Omega} \int_{\Delta f} I(\mathbf{s}_0, f) \cos \theta K(f) d\Omega df. \quad (2.4)$$

Определим важнейшую характеристику антенны — диаграмму направленности  $P(\mathbf{s}_0)$  [18, 32]. Это — функция, определяющая отклик антенны в зависимости от направления. Из принципа взаимности следует, что диаграмма направленности одна и та же, как для приема излучения, так и для передачи. Диаграмму направленности можно выразить через напряженность поля (диаграмма направленности по напряженности поля) или интенсивность излучения (диаграмма направленности по мощности). Различают диаграмму направленности в дальней зоне и ближней зоне. Границу  $R_{min}$  дальней зоны можно определить из условия: разность хода сферической и плоской волн от источника, находящегося на расстоянии  $R_{min}$ ,

должны быть меньше  $\lambda/16$  ( $\lambda$  — длина волны). Из этого условия следует, что для антенны диаметром  $D$  граница находится на расстоянии  $R_{min} = 2D^2/\lambda$  от антенны. Например, для антенны диаметром 32 м, длине волны  $\lambda = 3,5$  см (X-диапазон) получим  $R_{min} \approx 60$  км, для интерферометра с базой 7000 км  $R_{min} \approx 3 \times 10^{12}$  км или  $\sim 0,1$  пс. Это означает, что при наблюдениях источника, находящегося ближе расстояния  $R_{min}$ , необходимо учитывать сферичность фронта волны.

Кроме диаграмм направленности по напряженности поля и мощности часто пользуются фазовой диаграммой, которая отражает угловую зависимость фазы поля антенны. Фазовая диаграмма зависит от начала координат на антенне. Если можно найти такое положение начала координат, относительно которого фаза постоянна, т.е. не зависит от угла, то такое начало координат называется фазовым центром антенны. Фазовый центр является естественной реперной точкой, координаты которой определяют положение антенны. Из-за большой сложности определения фазового центра оказалось проще определить опорную точку как одну из точек фиксированной оси антенны (см. §4.4). При этом интуитивно предполагается, что антенна является жесткой, так что положение фазового центра относительно опорной точки фиксированной оси не меняется со временем. Зная положения опорных точек двух антенн, можно определить вектор базы как вектор, соединяющий эти точки.

Диаграмма направленности состоит из большого числа лепестков; лепесток, имеющий наибольший максимум, называется главным, а все остальные боковыми и задними (рис. 2.2).

Вычисление поля, создаваемого системой движущихся зарядов, выполняется на основе уравнений Максвелла. Для простейшей системы — диполя — интенсивность излучения пропорциональна множителю  $\sin^2 \theta$ , где  $\theta$  — угол между осью диполя и направлением излучения [19, 25]. Диаграмма направленности диполя по напряженности поля  $E$  пропорциональна  $\sin \theta$  (рис. 2.3).

Диаграмма направленности антенны по мощности  $P(\mathbf{s})$  как функция направления может быть представлена в виде:

$$P(\mathbf{s}) = E(\mathbf{s})E^*(\mathbf{s}),$$

где символ  $*$  обозначает комплексное сопряжение,  $E(\mathbf{s})$  — диаграмма направленности антенны по напряженности поля в дальней зоне. Максимальное значение  $P(\mathbf{s})$  равно  $P_{max}$ .

Таким образом, диаграмма направленности является угловой (пространственной) характеристикой или откликом антенны на приходящее с произвольного направления излучение. Обычно диаграмму представляют в

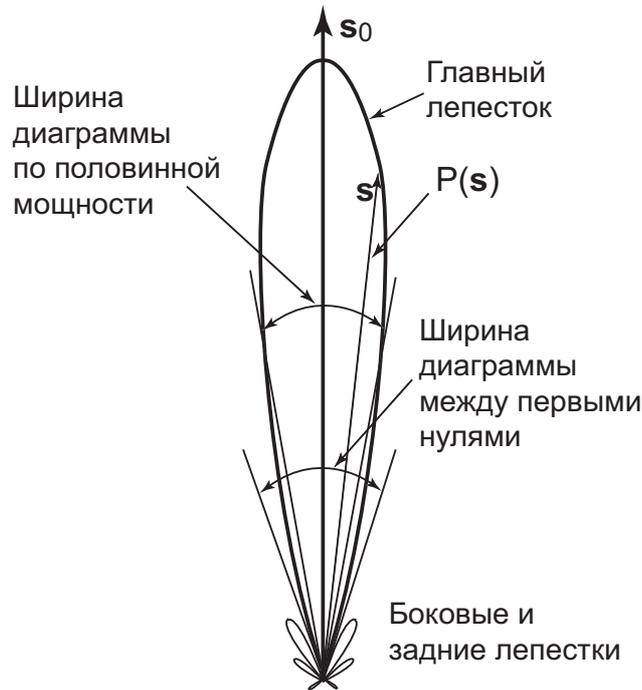


Рис. 2.2: Диаграмма направленности антенны по мощности  $P(s)$ .

виде нормированной безразмерной величины  $P_n(s) = P(s)/P_{max}$ , максимальное значение которой равно 1.

С диаграммой направленности связано понятие главного направления (электрической оси) антенны. В главном направлении диаграмма имеет наибольший максимум. На рис. 2.2 главное направление — это направление вектора  $s_0$ .

Пусть  $A(s_0) = A \cos \theta$ . Определим параметр  $A_{eff}$ , который называется эффективной площадью антенны, как отношение

$$A_{eff} = \frac{A(s_0)}{P_n(s_0)}. \quad (2.5)$$

Этот параметр показывает насколько эффективно антенна принимает излучение, приходящее с направления  $s_0$ , и преобразует его в энергию; он имеет размерность площади ( $m^2$ ).

Данное выше определение антенны и понятие главного направления позволяет определить эффективную площадь следующим образом: эффективная площадь  $A_{eff}$  есть отношение мощности, поступающей на вход приемника, согласованного с антенной (т.е. не отражающего часть мощности обратно к антенне) к мощности, приходящей с главного направления. Эффективная площадь всегда меньше геометрической площади:

$$A_{eff} = \eta_a A, \quad \eta_a < 1. \quad (2.6)$$

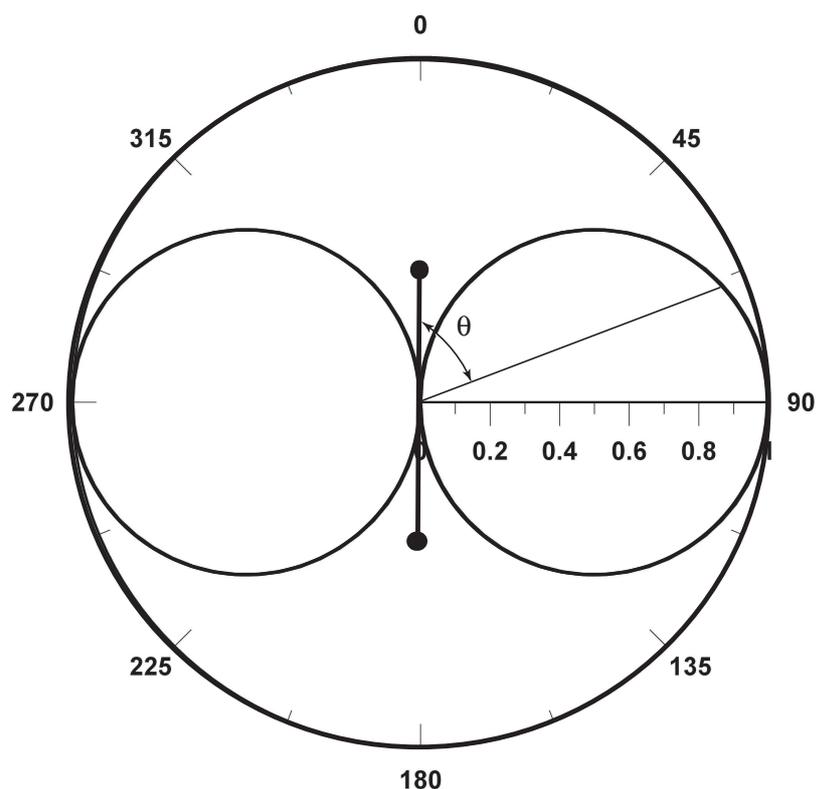


Рис. 2.3: Диаграмма направленности диполя по напряженности поля.

Используя определение диаграммы направленности, перепишем выражение (2.4). Воспользуемся для этого следующими постулатами:

1. Любая радиоволна может представлена в виде двух поляризованных компонент.
2. В хаотически поляризованной волне обе компоненты несут в среднем одинаковую мощность.
3. Любая антенна чувствительна в излучению вполне определенной поляризации.

В этом случае получим:

$$W = \frac{A_{eff}}{2} \int_{\Omega} \int_{\Delta f} I(\mathbf{s}_0, f) P_n(\mathbf{s}_0) K(f) df d\Omega. \quad (2.7)$$

Мощность, собираемая со всей небесной сферы, равна:

$$W = \frac{A_{eff}}{2} \int_{4\pi} \int_{\Delta f} I(\mathbf{s}_0, f) P_n(\mathbf{s}_0) K(f) df d\Omega. \quad (2.8)$$

Телесный угол диаграммы направленности  $\Omega_a$  — это угол, в котором излучается вся мощность передающей антенны при условии, что мощность постоянна на единицу телесного угла и равна максимальному значению (т.е. мощности, излучаемой как в главном направлении):

$$\Omega_a = \int_{4\pi} P_n(\mathbf{s}_0) d\Omega. \quad (2.9)$$

Если интегрирование в (2.8) проводить не по всей небесной сфере, а ограничиться только размерами главного лепестка, равного  $\Omega$ , то получим телесный угол главного лепестка диаграммы направленности:

$$\Omega_m = \int_{\Omega} P_n(\mathbf{s}_0) d\Omega.$$

Очевидно, что телесный угол главного лепестка равен разности между телесными углами диаграммы направленности  $\Omega_a$  и диаграмм ее боковых и задних лепестков.

Для простейших антенн примеры вычисления диаграммы направленности по полю приведены в [32]. Линейная антенна размером  $L$  длин волн с поляризацией, параллельной оси, имеет диаграмму направленности по полю

$$E(l) \approx \frac{\sin(\pi Ll)}{\pi Ll}$$

при  $L \gg 1$  и  $l = \cos \alpha$ ,  $\alpha$  — угол между осью антенны и направлением на источник. Эффективная площадь такой антенны равна

$$A(l) = \eta \frac{\lambda^2 L}{2\pi} \left[ \frac{\sin(\pi Ll)}{\pi Ll} \right]^2,$$

$\lambda$  — длина волны.

Прямоугольная антенна со сторонами  $L_x$  вдоль оси  $OX$  и  $L_y$  вдоль оси  $OY$  длин волн при  $L_x, L_y \gg 1$  имеет диаграмму направленности по полю

$$E(l, m) \approx \frac{\sin(\pi L_x l)}{\pi L_x l} \cdot \frac{\sin(\pi L_y m)}{\pi L_y m}$$

и эффективную площадь

$$A(l, m) = \eta \lambda^2 L_x L_y \left[ \frac{\sin(\pi L_x l)}{\pi L_x l} \cdot \frac{\sin(\pi L_y m)}{\pi L_y m} \right]^2,$$

$l = \cos \alpha$ ,  $m = \cos \beta$  — направляющие косинусы,  $\alpha, \beta$  — углы между осями  $OX$  и  $OY$  и направлением на источник. Для идеальной антенны без потерь, т.е. при  $\eta = 1$ , максимум эффективной площади равен геометрической площади  $\lambda^2 L_x L_y$ . Таким образом, нормированная диаграмма направленности антенны по мощности вдоль какой-либо оси пропорциональна функции  $(\sin x/x)^2$ . Для квадратной антенны со стороной  $L$  расстояние между первыми нулями определяется равенством  $\pi Ll/\lambda = \pm\pi$ , т.е. угловое расстояние от максимума до первого нуля равно  $\lambda/L$ . Ширина диаграммы по половинной мощности квадратной антенны равна  $0,89\lambda/L$ . Для круглой антенны с диаметром  $D$  угловое расстояние от максимума до первого нуля равно  $1,22\lambda/D$ , а ширина по половинной мощности равна  $1,02\lambda/D$ .

С шириной диаграммы радиотелескопа связана и его разрешающая способность, т.е. минимальное угловое расстояние  $\theta_{min}$  между двумя точечными источниками, которые можно различить отдельно, так как  $\theta_{min} \sim \lambda/D$ .

После определения телесного угла диаграммы направленности можно определить такие понятия, как «точечный» и «протяженный» источник. Если  $\Omega_s$  — телесный угол источника и  $\Omega_s \ll \Omega_a$ , то это точечный источник. Если  $\Omega_s \approx \Omega_a$  или  $\Omega_s > \Omega_a$ , то источник протяженный.

Пусть  $I = \text{const}$  в пределах телесного угла  $\Omega_a$  и  $K(f) = 1$  в полосе частот  $\Delta f$ . Тогда из выражения (2.8) получим

$$W = \frac{A_{eff}}{2} I \Delta f \Omega_a.$$

Если наблюдение источника проводится антенной с диаграммой направленности  $P_n(\mathbf{s}_0)$ , то измеряемая плотность потока равна

$$S_a = \int_{\Omega_s} I(\mathbf{s}_0, f) P_n(\mathbf{s}_0) d\Omega. \quad (2.10)$$

Из-за направленных свойств диаграммы  $P_n(\mathbf{s}_0)$  наблюдаемая плотность потока источника будет меньше, чем реальная плотность, определяемая выражением (2.2).

Для точечного источника имеем  $\Omega_s \ll \Omega_a$ . При малом угловом размере источника, когда антенна наведена на источник,  $P \approx 1$  по всему источнику, и плотность потока почти равна истинной:  $S_a \approx S_s$ . Значит, мощность на выходе антенны при наблюдении точечного источника равна

$$W = \frac{A_{eff}}{2} S_s \Delta f. \quad (2.11)$$

Когда размер источника превышает телесный угол диаграммы направленности  $\Omega_s \geq \Omega_a$ , яркость источника можно считать почти постоянной в

пределах главного лепестка, т.е.  $I \approx \text{const}$ . Тогда вместо (2.10) можно написать:

$$S_a = I(\mathbf{s}_0, f) \int_{\Omega_m} P_n(\mathbf{s}_0) d\Omega \approx I(\mathbf{s}_0, f) \Omega_m,$$

где  $\Omega_m$  — телесный угол главного лепестка диаграммы направленности.

## 2.2 Антенная и яркостная температуры

Введем понятие антенной температуры. Для этого приравняем величину  $W$  (2.8) мощности теплового шума  $W_n$  сопротивления  $R$  с температурой  $T_a$ , включенного на вход приемника вместо антенны. Мощность шума в полосе частот  $\Delta f$ , выделяемая на таком сопротивлении, определяется по формуле Найквиста [170]:

$$W_n = k\Delta f T_a, \quad (2.12)$$

где  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{Вт}/(\text{Гц} \cdot \text{К})$  — постоянная Больцмана. В (2.12)  $T_a$  — антенная температура — измеряется в градусах Кельвина, однако это не реальная температура антенны, а уровень мощности принимаемого антенной излучения.

Для точечного источника имеем из (2.9) и (2.12):

$$k\Delta f T_a = \frac{A_{eff}}{2} S_s \Delta f$$

или

$$T_a = \frac{A_{eff} S_s}{2k}. \quad (2.13)$$

Аналогично и радиояркость выразим через температуру. Если антенна помещена внутрь абсолютно черного тела при температуре  $T_B$ , то яркость такого тела будет постоянной для всех направлений ( $I = \text{const}$ ). Температура  $T_B$  этого фиктивного тела и есть яркостная температура источника.

Для радиочастот интенсивность излучения черного тела подчиняется закону Рэлея—Джинса:

$$I_{bb} = \frac{2kT_B}{\lambda^2}.$$

Учтем, что тепловое излучение хаотически поляризовано:

$$I = \frac{1}{2} I_{bb}.$$

В общем случае, как радиояркость  $I(\mathbf{s}_0)$ , так и яркостная температура источника являются функцией направления  $\mathbf{s}$ , т.е.

$$I(\mathbf{s}_0) = \frac{kT_B(\mathbf{s}_0)}{\lambda^2}. \quad (2.14)$$

Соотношение (2.14) определяет радиояркость через яркостную температуру источника, однако ее не следует связывать с реальной температурой.

Считая, что  $K(f) = 1$  в полосе частот  $\Delta f$ , приравняем мощность теплового шума  $W_n$  (2.12) мощности собираемой антенной со всей небесной сферы (2.8). Используя (2.14), получим

$$k\Delta f T_a = A_{eff} \int_{4\pi} \int_{\Delta f} \frac{kT_B(\mathbf{s}_0)}{\lambda^2} P_n(\mathbf{s}_0) df d\Omega.$$

Считая, что полоса частот достаточно узкая и радиояркость  $I(\mathbf{s}_0)$  не зависит от частоты, находим уравнение, связывающее антенную и яркостную температуру источника:

$$T_a = \frac{A_{eff}}{\lambda^2} \int_{4\pi} P_n(\mathbf{s}_0) T_B(\mathbf{s}_0) d\Omega. \quad (2.15)$$

Антенная температура равна интегралу по сфере от яркостной температуры, умноженному на эффективную площадь антенны, выраженную в квадратах длины волны.

Из этого соотношения можно сделать важный вывод. Если на выходе антенны помещена согласованная нагрузка и вся система помещена в черный ящик с температурой  $T$ , то система находится в равновесии. Это означает, что количество энергии  $kT$ , поступающее от антенны к нагрузке, равно количеству энергии, излучаемой антенной.

Таким образом,  $T_a = T$ . Но по определению  $T = T_B(\mathbf{s}_0)$ . Значит,

$$A_{eff} \int_{4\pi} P_n(\mathbf{s}_0) d\Omega = \lambda^2, \quad (2.16)$$

т.е. интеграл по сфере от площади антенны равен длине волны в квадрате. Теоретически для определения эффективной площади достаточно знать диаграмму направленности по мощности:

$$A_{eff} = \frac{\lambda^2}{\int_{4\pi} P_n(\mathbf{s}_0) d\Omega} = \frac{\lambda^2}{\Omega_a}. \quad (2.17)$$

Пусть антенна направлена в точку с координатами  $\theta, \lambda$ , т.е. главное направление антенны задается единичным вектором  $\mathbf{s}$ . Из-за вращения Земли через диаграмму направленности проходит источник с яркостной температурой  $T_B$ . Если ввести локальную систему координат с началом в выбранной точке источника (фазовом центре)  $\theta_0, \lambda_0$ , то углы  $\theta - \theta_0, \lambda - \lambda_0$  представляют собой углы отклонения диаграммы направленности от начала координат:

$$T_a(\mathbf{s}) = \frac{A_{eff}}{\lambda^2} \int_{\Omega} T_B(\mathbf{s}_0) P_n(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0) d\Omega. \quad (2.18)$$

Это — уравнение антенного сглаживания (уравнение свертки). Можно сказать, что антенная температура  $T_a$  является сверткой яркостной температуры  $T_B$  и диаграммы направленности  $P_n$ . Из уравнения (2.18) следует, что истинная антенная температура  $T_a(\mathbf{s})$  в направлении  $\mathbf{s}$ , будет искажаться за счет диаграммы направленности  $P_n$ . Если мы хотим восстановить реальную радиояркость источника  $T_B$ , то надо знать  $P_n$ .

Рассмотрим теперь два случая. При наблюдении точечного источника угловой размер главного лепестка диаграммы направленности значительно больше размера источника, поэтому мы можем написать, что

$$T_B = T_0 \delta(\mathbf{s}_0),$$

где  $\delta$  — это дельта-функция. Точечный источник находится в направлении  $\mathbf{s}_0$ , тогда как главное направление антенны задается единичным вектором  $\mathbf{s}$ . Из выражения (2.18) следует, что

$$T_a(\mathbf{s}) = \frac{A_{eff}}{\lambda^2} \int_{\Omega} T_0 \delta(\mathbf{s}_0) P_n(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0) d\Omega.$$

Учитывая, что  $T_0 = I \lambda^2 / 2k$  получим

$$T_a(\mathbf{s}) = \frac{A_{eff}}{2k} \int_{\Omega} I \delta(\mathbf{s}_0) P_n(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0) d\Omega.$$

Так как при  $\Omega_s \ll \Omega_a$   $P_n \approx \text{const}$  и интеграл отличен от нуля только при  $\mathbf{s} = \mathbf{s}_0$ , то

$$T_a(\mathbf{s}_0) \approx \frac{A_{eff}}{2k} S_s P_n(\mathbf{s}_0). \quad (2.19)$$

Отклик на точечный источник определяется диаграммой направленности антенны.

В качестве второго случая рассмотрим наблюдение протяженного источника. В случае, если угловой размер источника значительно больше главного лепестка диаграммы направленности ( $\Omega_s \gg \Omega_a$ ), то можно написать, что  $P_n(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0) \approx \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0)$ . С учетом  $A_{eff} = \lambda^2 (\Omega_a = 1)$  из (2.17) получим

$$T_a(\mathbf{s}) \approx T_B(\mathbf{s}),$$

т.е. антенная температура точно повторяет распределение яркостной температуры.

## 2.3 Основы радиоинтерферометрии

Будем считать, что антенна принимает электромагнитное излучение от радиоисточника, находящегося на бесконечно большом расстоянии.

Из теоремы Фурье следует, что любую волну можно рассматривать как суперпозицию монохроматических волн разных частот. Если волна распространяется вдоль вектора  $\mathbf{r}$ , то электрическое поле волны может быть представлено реальной частью выражения [2]:

$$V(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[ \int_0^{\infty} A(\omega) e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} d\omega \right], \quad (2.20)$$

где  $\mathbf{k}$ —волновой вектор,  $\omega$ —циклическая частота ( $\omega = 2\pi f$ ).

Предположим, что фурье-амплитуды  $A(\omega)$  заметно отличаются от нуля в узкой полосе частот  $\Delta\omega$  относительно центральной частоты  $\omega_0$ , т.е.

$$\omega_0 - \Delta\omega/2 \leq \omega \leq \omega_0 + \Delta\omega/2 \quad (\Delta\omega/\omega_0 \ll 1).$$

Тогда волну можно назвать «почти монохроматической» или волновым пакетом.

Рассмотрим для простоты плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси  $z$ . Тогда

$$V(z, t) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} A(\omega) e^{-i(\omega t - kz)} d\omega. \quad (2.21)$$

Пусть  $k_0 = n(\omega_0)\omega_0/c$ , где  $n$ —показатель преломления. Тогда

$$V(z, t) = A(z, t) e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)},$$

где

$$A(z, t) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} A(\omega) e^{-i[(\omega - \omega_0)t - (k - k_0)z]} d\omega \approx \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} A(\omega) e^{-i(\omega - \omega_0)[t - \frac{dk}{d\omega}z]} d\omega.$$

Таким образом,  $V$  можно интерпретировать как монохроматическую плоскую волну с переменной амплитудой  $A(z, t)$ , частотой  $\omega_0$  и волновым числом  $k_0$ , распространяющуюся вдоль оси  $z$ .

Амплитуда  $A(z, t)$  представляет суперпозицию гармонических волн с частотами  $\omega - \omega_0$ . Если  $\Delta\omega/\omega_0$  мало по сравнению с единицей, то амплитуда  $A(z, t)$  медленно меняется при изменении частоты  $\omega$  по сравнению с изменением от второго члена. Поверхности  $t = \frac{dk}{d\omega}z$  играют особую роль; на каждой такой поверхности амплитуда  $A(z, t)$  постоянна. Следовательно, скорость перемещения какого-либо значения  $A$ , а также максимума  $|A|$ , определяется групповой скоростью

$$v_g = \frac{z}{t} = \frac{d\omega}{dk}.$$

Интервал частот  $\Delta\omega$  представляет важный параметр, относящийся к волновому пакету; по существу эта величина определяет скорость изменения амплитуды и фазы. Если дисперсия среды невелика, то волновой пакет проходит значительное расстояние без заметного размытия.

Перепишем интеграл (2.21) в виде:

$$V(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{ikz} e^{-i\omega t} d\omega. \quad (2.22)$$

Если ввести обозначение  $B(z, \omega) = A(\omega) e^{ikz}$ , причем  $A(\omega) = 0$  вне интервала  $\Delta\omega$ , то

$$V(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} B(z, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

или согласно обратному преобразованию Фурье

$$B(z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} V(z, t) e^{i\omega t} dt.$$

Предположим, что длительность волнового пакета  $\Delta t$ , и в течение этого времени  $V(t)$  есть периодическая функция с частотой  $f_0$ :

$$V(t) = \begin{cases} V_0 e^{-i2\pi f_0 t}, & |t| \leq \Delta t/2, \\ 0, & |t| > \Delta t/2, \end{cases}$$

где  $V_0$ —постоянная величина. Тогда величина

$$B(\omega) = V_0 \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} e^{i2\pi(f-f_0)t} dt = V_0 \Delta t \frac{\sin \pi(f-f_0)\Delta t}{\pi(f-f_0)\Delta t}$$

пропорциональна функции вида  $\frac{\sin x}{x}$ . Интенсивность пропорциональна квадрату  $B$  или  $(\sin x/x)^2$ , т.е.

$$E \sim \left( \frac{\sin \pi \Delta f \Delta t}{\pi \Delta f \Delta t} \right)^2 \quad (2.23)$$

и основная часть энергии приходится на центральный пик, ограниченный интервалом  $\pm \Delta f$  относительно  $f_0$ ;  $\Delta f$  называют шириной полосы когерентного волнового пакета. Первые нули выражения (2.23) соответствуют условию  $\pi \Delta f \Delta t = \pm \pi$ , т.е.

$$\Delta t = \frac{1}{\Delta f}. \quad (2.24)$$

Это — время когерентности. Например, при  $\Delta f = 50$  МГц время когерентности  $\Delta t$  равно 20 нс. Это означает, что в волновом пакете с энергетическим спектром  $E$  (2.23) волны в частотном диапазоне  $f_0 - \Delta f \leq f \leq f_0 + \Delta f$  сохраняют одинаковые фазы в течение времени  $\Delta t$ . За время  $\Delta t$  свет пройдет расстояние

$$l = c \Delta t = \frac{c}{\Delta f}, \quad (2.25)$$

известное как длина когерентности. С учетом того, что  $f = c/\lambda$  и

$$|\Delta f| = c |\Delta \lambda| / \lambda^2,$$

можно выразить длину когерентности через длину волны:

$$l = \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda}. \quad (2.26)$$

При наблюдениях в X-диапазоне ( $f = 8,4$  ГГц,  $\lambda = 3,5$  см) при  $\Delta f = 50$  МГц получим  $l \approx 6$  м, что составляет примерно 170 длин волн. Физический смысл длины когерентности легко понять: это максимально допустимая разность хода волн, частоты которых различаются на  $\Delta f$  (длины волн

на  $\Delta\lambda$ ), при которой волны еще остаются когерентными. Большая длина когерентности в X-диапазоне позволяет относительно легко осуществить когерентное сложение волн и получить интерференционную картину.

Для видимого диапазона (например, при  $\lambda = 550$  нм,  $\Delta\lambda = 10$  нм) длина когерентности равна  $l = 3 \times 10^{-5}$  м, что составляет примерно 55 длин волн, и когерентное сложение волн выполнить сложнее.

### 2.3.1 Суммирующий радиоинтерферометр

Упрощенная схема двухэлементного суммирующего радиоинтерферометра представлена на рис. 2.4.

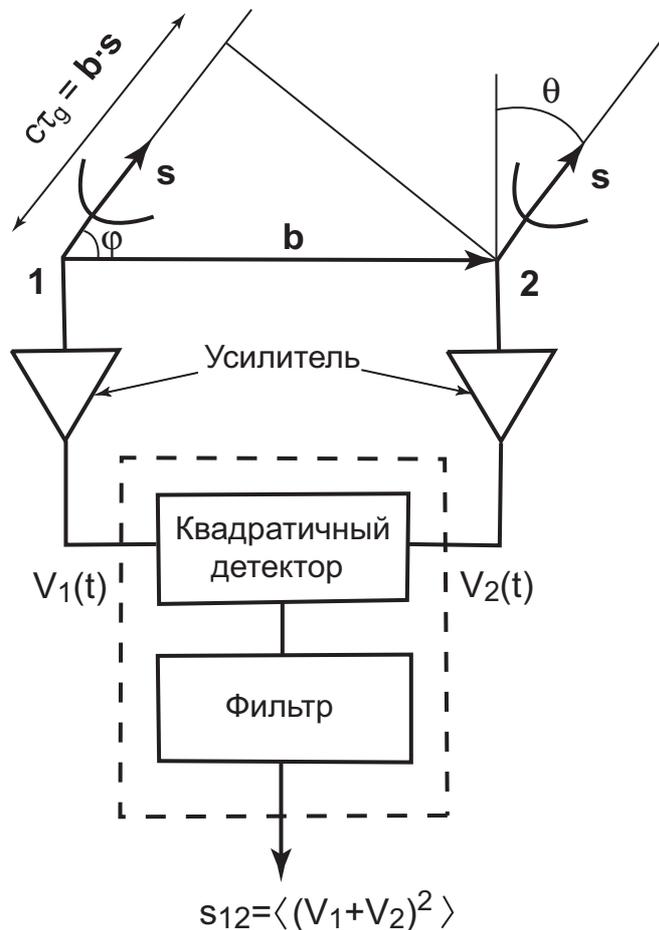


Рис. 2.4: Схема суммирующего радиоинтерферометра.

Два телескопа наблюдают далекий точечный радиочастотный источник, положение которого задано единичным вектором  $\mathbf{s}$ . Мы можем считать, что проходящий волновой фронт является плоским. Если  $\mathbf{b}$  — вектор базы,  $b = |\mathbf{b}|$  —

длина базы, а  $\tau_g$  — геометрическая задержка прихода волны на «удаленный» телескоп (на рис. 2.4 это телескоп с номером 1), то

$$\tau_g = \frac{1}{c} \mathbf{b} \cdot \mathbf{s} = \frac{b}{c} \cos \varphi = \frac{b}{c} \sin \theta, \quad (2.27)$$

где  $c$  — скорость света,  $\varphi$  — угол между вектором базы и вектором направления на источник,  $\theta$  — угол между перпендикуляром к вектору базы и вектором направления на источник. В этом случае величина  $\tau_g$  положительна.

Сначала предположим, что интерферометр принимает монохроматический сигнал с частотой  $f$  (соответствующая длина волны равна  $\lambda$ ).

Пусть напряжение на выходе усилителя с номером «1» равно:  $V_1 = v_1 \cos 2\pi ft$ , а на выходе усилителя «2»:  $V_2 = v_2 \cos 2\pi f(t - \tau_g)$ . Квадраты амплитуд  $v_1$  и  $v_2$  сигналов пропорциональны принимаемой мощности (2.8), т. е. зависят от диаграммы направленности по мощности и от коэффициентов усиления  $G_1, G_2$  усилителей. Для точечного источника  $v_1^2 = G_1 \frac{A_{eff}}{2} S_s P_n \Delta f$ ,  $v_2^2 = G_2 \frac{A_{eff}}{2} S_s P_n \Delta f$ . Для упрощения будем считать, что эффективные площади антенн, их диаграммы направленности и параметры усилителей  $G_1, G_2$  одинаковы, т. е.  $v_1 = v_2 = v$ .

Выход квадратичного детектора представляет собой квадрат суммы напряжений сигналов:

$$(V_1 + V_2)^2.$$

После усреднения квадратичного сигнала со временем  $T \gg 1/f$  (низкочастотной фильтрации) получим отклик суммирующего радиоинтерферометра на далекий точечный источник:

$$s_{12} = \frac{1}{T} \int_0^T (V_1 + V_2)^2 dt = v^2 [1 + \cos(2\pi f \tau_g)] = v^2 \left[ 1 + \cos\left(2\pi \frac{b}{\lambda} \cos \varphi\right) \right]. \quad (2.28)$$

Первый сомножитель в (2.28) пропорционален диаграмме направленности по мощности антенны интерферометра. В нашем случае антенны одинаковые, и на рис. 2.5,а показана функция  $(\sin x/x)^2$ , вычисленная при  $x = \pi(L/\lambda) \cos \alpha$  и  $L/\lambda = 100$ . Второй сомножитель представляет диаграмму направленности по мощности решетки, состоящей из двух элементов [18]. Диаграмма имеет много интерференционных лепестков (рис. 2.5,б). Расстояние между нулями (ширина интерференционного лепестка) зависит от отношения  $b/\lambda$ . Произведение двух сомножителей дает диаграмму направленности суммирующего интерферометра (рис. 2.5,в).

Из выражения (2.28) следует, что интерференционная картина наблюдается на фоне постоянного сигнала. Проблема состоит в том, что коэффи-

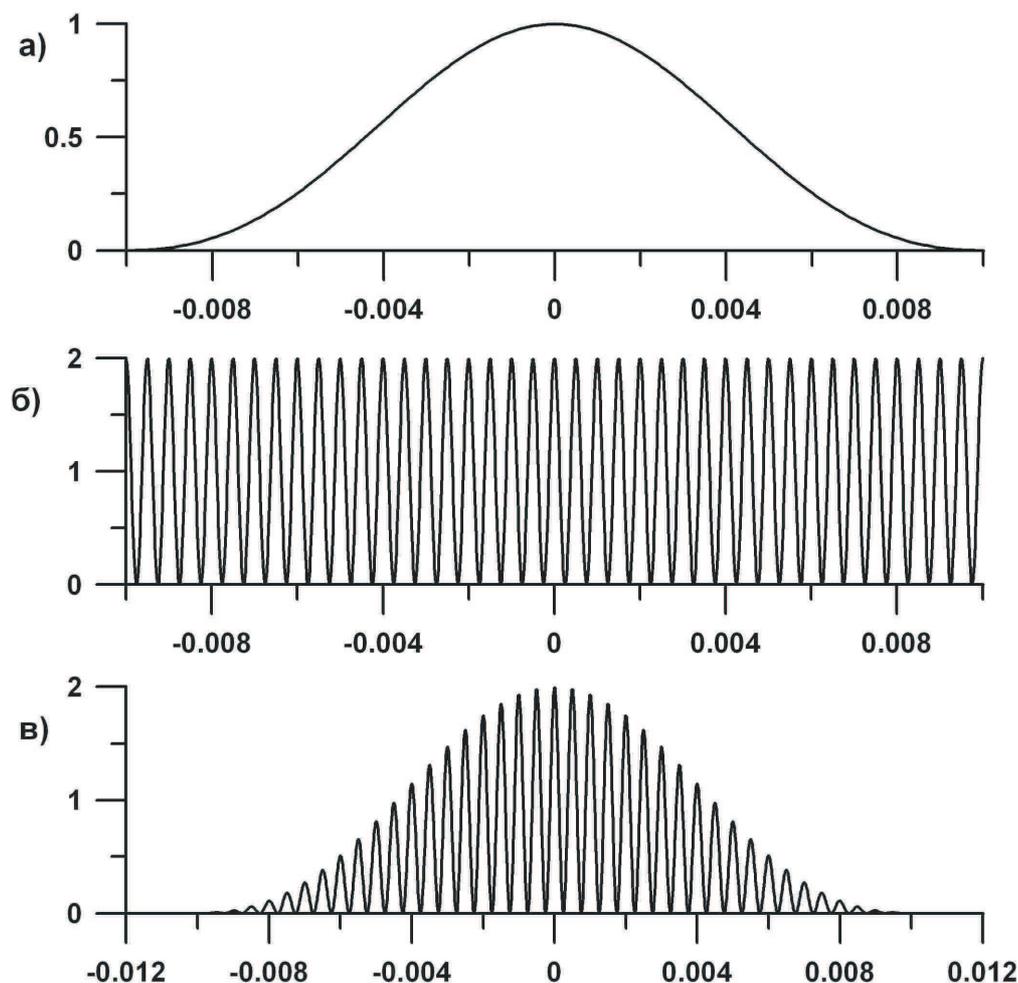


Рис. 2.5: Нормированная диаграмма направленности по мощности антенны интерферометра, вычисленная при  $L/\lambda = 100$  (а); диаграмма направленности решетки из двух одинаковых элементов, вычисленная при  $b/\lambda = 2000$  (б); результирующая диаграмма направленности интерферометра. По оси ординат приводится угол  $\alpha$  в радианах.

коэффициент усиления приемника меняется со временем, и это изменение не известно. Из-за дрейфа уровня выходного сигнала усилителя снижается точность измерения интерференционных лепестков. Кроме этого увеличение мощности на выходе приемника из-за случайных вариаций коэффициента усиления неотличимо от появления в диаграмме направленности слабого источника.

Для устранения недостатков суммирующего интерферометра Райл [192] предложил периодически менять фазу одного из элементов на противоположную, так что выходной сигнал принимает значения  $(V_1 + V_2)^2$  или  $(V_1 - V_2)^2$ . Частота переключений составляет несколько десятков герц и разностный сигнал, пропорциональный  $V_1 V_2$ , выделяется синхронным де-

тектором. Таким образом, выходной сигнал интерферометра с модуляцией фазы представляет собой усредненное по времени произведение напряжений входных сигналов, т.е. пропорционален их кросс-корреляции.

В современных радиоинтерферометрах подобный результат достигается использованием коррелятора — устройства, в котором происходит перемножение и усреднение сигналов.

### 2.3.2 Корреляционный радиоинтерферометр

Назовем коррелятором устройство, которое вычисляет комплексную кросс-корреляционную функцию в соответствии с выражением

$$s_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} V_1(t) V_2^*(t - \tau) dt = \langle V_1(t) V_2^*(t - \tau) \rangle, \quad (2.29)$$

где  $V_1(t)$ ,  $V_2(t)$  — напряжения сигналов на входе коррелятора, символ  $*$  означает комплексное сопряжение.

Упрощенная схема двухэлементного корреляционного радиоинтерферометра представлена на рис. 2.6. Для простоты представим, что на выходе каждой антенны имеется усилитель с коэффициентом усиления  $G$  и полосой пропускания  $\Delta f$ .

В отличие от суммирующего интерферометра сигналы, равные на выходе усилителей  $V_1$ ,  $V_2$ , поступают не в сумматор, а в коррелятор, в котором происходит перемножение и усреднение сигналов. На выходе умножителя сигнал равен

$$\begin{aligned} V_1 \cdot V_2 &= v_1 v_2 \cos \omega t \cos \omega(t - \tau_g) = \\ &= \frac{v_1 v_2}{2} [\cos \omega \tau_g + \cos 2\omega t \cos \omega \tau_g + \sin 2\omega t \sin \omega \tau_g], \end{aligned}$$

$\omega = 2\pi f$  — циклическая частота, которая может быть в диапазоне от сотен мегагерц до сотен гигагерц. Величина задержки  $\tau_g$  медленно меняется со временем вследствие вращения Земли. Из (2.27) получим

$$\frac{d\tau_g}{dt} = -\frac{b}{c} \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{b\Omega}{c} \sin \varphi, \quad (2.30)$$

где  $\Omega \approx 7 \times 10^{-5}$  рад/с скорость вращения Земли. При длинах баз, сравнимых с диаметром Земли ( $b \sim 10^7$  м), изменение аргумента  $\omega \tau_g$  за время накопления (от нескольких секунд до нескольких минут) значительно меньше изменения аргумента  $\omega t$ . Это означает, что накопление сигнала приводит к отфильтровыванию быстропеременных членов. На выходе

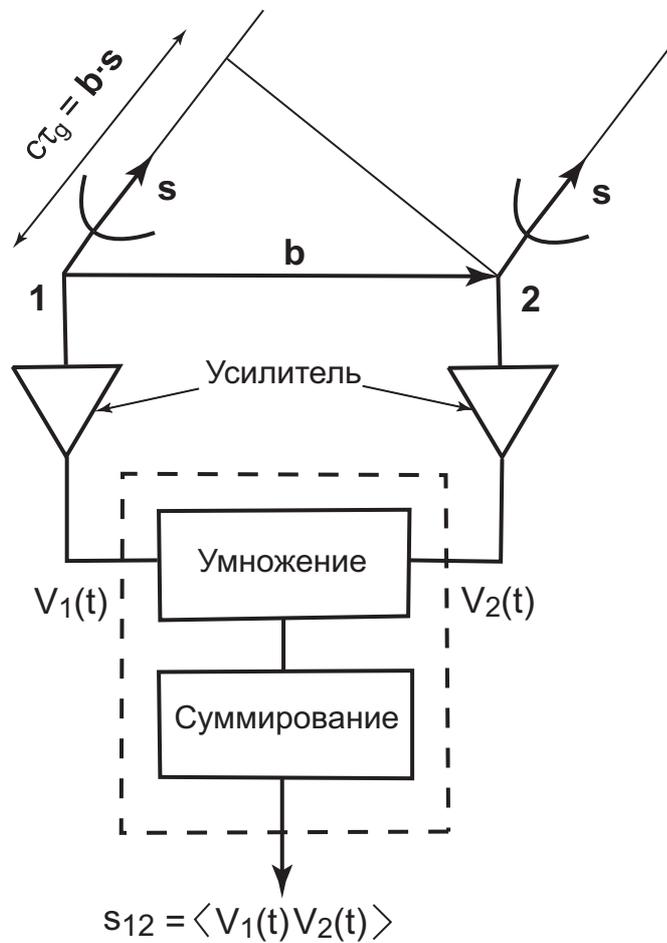


Рис. 2.6: Схема двухэлементного корреляционного радиоинтерферометра.

коррелятора для действительных сигналов имеем:

$$s_{12} = \langle V_1 \cdot V_2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T V_1 \cdot V_2 dt$$

или

$$s_{12} \approx \frac{v_1 v_2}{2} \left[ \cos \omega \tau_g + T \frac{\sin \omega T}{\omega T} \cos \omega (T - \tau) \right].$$

При времени накопления  $T \gg 1/f$  (величина  $1/f$  составляет от долей микросекунды до долей наносекунды, а  $T$  — секунды), величина  $\cos \omega \tau_g$  почти постоянна, а  $\frac{\sin \omega T}{\omega T} \approx 0$ , поэтому

$$s_{12} \approx \frac{v_1 v_2}{2} \cos \left( 2\pi \frac{b}{\lambda} \cos \varphi \right). \quad (2.31)$$

Отклик интерферометра (2.31) получен в предположении приема монохроматического сигнала на частоте  $f$ . Если сигнал принимается в поло-

се частот от  $f - \Delta f/2$  до  $f + \Delta f/2$ , то выходной сигнал коррелятора будет равен

$$s_{12} = \frac{1}{\Delta f} \int_{f-\Delta f/2}^{f+\Delta f/2} \frac{v_1 v_2}{2} \cos\left(2\pi f \frac{b}{c} \cos \varphi\right) df.$$

Интегрируя, получим (при  $v_1 = v_2 = v$ ) в случае постоянства спектральной плотности источника в полосе  $\Delta f$

$$s_{12} = \frac{v^2}{2} \cos\left(2\pi f \frac{b}{c} \cos \varphi\right) \frac{\sin \pi \Delta f \frac{b}{c} \cos \varphi}{\pi \Delta f \frac{b}{c} \cos \varphi}. \quad (2.32)$$

Таким образом, диаграмма интерферометра определяется диаграммой направленности одиночной антенны, т.е. огибающей вида  $(\sin x/x)^2$ , ширина которой определяется полосой приема, и высокочастотным заполнением вида  $\cos\left(2\pi \frac{b}{\lambda} \cos \varphi\right)$ . Период интерференционных лепестков изменяется обратно пропорционально величине  $b/\lambda$  и не зависит от полосы пропускания  $\Delta f$ . Однако отклик по полосе пропускания является функцией как  $\Delta f$ , так и  $b$ : широким полосам пропускания и большим базами соответствуют узкие огибающие интерференционных лепестков.

Таким образом, интерферометр играет роль узкополосного фильтра пространственных частот  $b/\lambda$  и в случае, если размер антенны много меньше длины базы и  $\pi \Delta f \frac{b}{c} \ll 1$ , то он настроен на одну гармонику пространственных частот источника. Если источник имеет сложную структуру, то амплитуда этой гармоники может оказаться малой, недостаточной для ее выделения из шумов. Выходом может быть изменение пространственной частоты фильтра, т.е. параметров интерферометра — длины базы и (или) длины волны.

Из (2.32) следует, что полная амплитуда интерференционной картины будет достигаться лишь при  $\tau_g = 0$ , т.е. когда направление на источник перпендикулярно базе ( $\mathbf{s} \perp \mathbf{b}$ ,  $\varphi = 90^\circ$ ). Диапазон значений задержек, для которых амплитуда интерференционных лепестков изменяется, например, не более чем на 10% от максимального значения, находится из уравнения

$$\frac{\sin \pi \Delta f \tau_g}{\pi \Delta f \tau_g} \approx 1 - \frac{(\pi \Delta f \tau_g)^2}{6} > 0.9 \quad (2.33)$$

при условии, что  $|\pi \Delta f \tau_g| \ll 1$ . Решение (2.33) есть  $|\Delta f \tau_g| < 0.25$ . Величина  $\tau_g$  зависит от длины и ориентации базы относительно направления на источник. Например, при  $\Delta f = 30$  МГц, длине базы 1000 км амплитуда интерференции уменьшается на 10% при угле  $\theta$  (рис. 2.4), равном всего  $0''5$ .

Чтобы наблюдать источник при больших углах  $\theta$  без ухудшения интерференции, необходимо при корреляции вводить компенсирующую задержку (см. § 3.6).

### 2.3.3 Пространственная когерентность

Рассмотрим теперь две точки  $P_1$  и  $P_2$ , находящиеся на большом расстоянии от протяженного источника квазимонохроматического излучения. Предположим, что точки находятся в плоскости  $xy$ , параллельной плоскости источника. Если расстояние между точками не превышает длины когерентности, то изменение фаз волн в них синфазно. При увеличении расстояния между точками  $P_1$  и  $P_2$  изменения фаз волн уже не будут одинаковыми.

Для количественного описания этого явления желательно ввести некоторую меру корреляции между колебаниями в точках  $P_1$  и  $P_2$ . В оптике такая мера связана с резкостью интерференционных полос, которые появились бы при сложении колебаний в этих точках. Естественно ожидать появления резких полос при сильной корреляции (например, когда свет в точки  $P_1$  и  $P_2$  приходит от точечного источника, излучающего в узком спектральном диапазоне) и размытия полос или же исчезновения при уменьшении корреляции (в случае, когда в точки  $P_1$  и  $P_2$  свет приходит от разных точек протяженного источника или от различных источников). Для описания таких ситуаций используются термины «когерентный» или «некогерентный».

Применительно к радиоинтерферометрии важны исследования в оптике (см. главу 10 [2]), связанные с определением частичной когерентности и, в частности, с исследованием связи между видностью интерференционных полос и распределением яркости по поверхности протяженного источника света.

Математически эта связь устанавливается теоремой ван Циттерта–Цернике (см., например, [76]).

Электрическое поле, создаваемое одним и тем же элементом протяженного источника, радиус-вектор которого относительно небесной системы координат равен  $\mathbf{R}$ , в точках  $P_1$  и  $P_2$ , равно

$$E(\mathbf{r}_1) = \int_S \mathcal{E}(\mathbf{R}) \frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_1|} e^{i2\pi\nu|\mathbf{R} - \mathbf{r}_1|/c} ds,$$

$$E(\mathbf{r}_2) = \int_S \mathcal{E}(\mathbf{R}) \frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_2|} e^{i2\pi\nu|\mathbf{R} - \mathbf{r}_2|/c} ds,$$

где  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ —радиус-векторы точек  $P_1$  и  $P_2$ ,  $\mathcal{E}(\mathbf{R})$ —электрическое поле элемента источника с радиус-вектором  $\mathbf{R}$ ,  $ds$ —элемент площади источника.

Корреляция электрических полей  $E(\mathbf{r}_1)$  и  $E(\mathbf{r}_2)$  в точках  $P_1$  и  $P_2$  определяется как математическое ожидание их произведения:

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle E(\mathbf{r}_1)E^*(\mathbf{r}_2) \rangle, \quad (2.34)$$

символ  $*$  означает комплексное сопряжение. Из (2.34) находим корреляционную функцию полей двух разных областей протяженного источника:

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \left\langle \int \int \mathcal{E}(\mathbf{R}_1)\mathcal{E}^*(\mathbf{R}_2) \frac{e^{i2\pi\nu|\mathbf{R}_1-\mathbf{r}_1|/c}}{|\mathbf{R}_1-\mathbf{r}_1|} \frac{e^{-i2\pi\nu|\mathbf{R}_2-\mathbf{r}_2|/c}}{|\mathbf{R}_2-\mathbf{r}_2|} ds_1 ds_2 \right\rangle.$$

Произведение интегралов в (2.34) можно записать как двойной интеграл по двум независимым областям  $ds_1$  и  $ds_2$ .

Предположим, что излучение от двух областей протяженного источника некогерентно, т.е.

$$\langle \mathcal{E}(\mathbf{R}_1)\mathcal{E}^*(\mathbf{R}_2) \rangle = 0$$

при  $\mathbf{R}_1 \neq \mathbf{R}_2$ . Тогда, меняя знаки математического ожидания и интегралов, получим

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int \langle \mathcal{E}(\mathbf{s})\mathcal{E}^*(\mathbf{s}) \rangle |\mathbf{R}|^4 \frac{e^{i2\pi\nu|\mathbf{R}-\mathbf{r}_1|/c}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}_1|} \frac{e^{-i2\pi\nu|\mathbf{R}-\mathbf{r}_2|/c}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}_2|} ds.$$

Здесь мы ввели единичный вектор в направлении излучающей области, равный  $\mathbf{s} = \mathbf{R}/|\mathbf{R}|$ . Величина  $\langle \mathcal{E}(\mathbf{s})\mathcal{E}^*(\mathbf{s}) \rangle$  представляет собой усредненное по времени распределение интенсивности  $I(\mathbf{s})$  источника:

$$I(\mathbf{s}) = \langle \mathcal{E}(\mathbf{s})\mathcal{E}^*(\mathbf{s}) \rangle.$$

Если источник находится на большом расстоянии, то можно пренебречь малыми членами порядка  $\mathbf{r}/\mathbf{R}$ , также заменить элемент поверхности  $ds$  на  $|\mathbf{R}|^2 d\Omega$ . Тогда получим

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int I(\mathbf{s}) e^{-i2\pi\nu|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|/c} d\Omega.$$

Заметим, что  $V$  зависит от разности  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ , а не от абсолютного положения точек  $P_1$  и  $P_2$ . Следовательно, можно зафиксировать одну из точек и изучать свойства поля, смещая вторую; нет необходимости измерять поля во всех возможных парах точек.

Функция  $V$ , зависящая только от вектора  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ , называется функцией пространственной когерентности.

Теорема Ван Циттерта–Цернике связывает пространственную когерентность с функцией видности.

Для определения функции видности введем дополнительную систему координат (рис. 2.7).

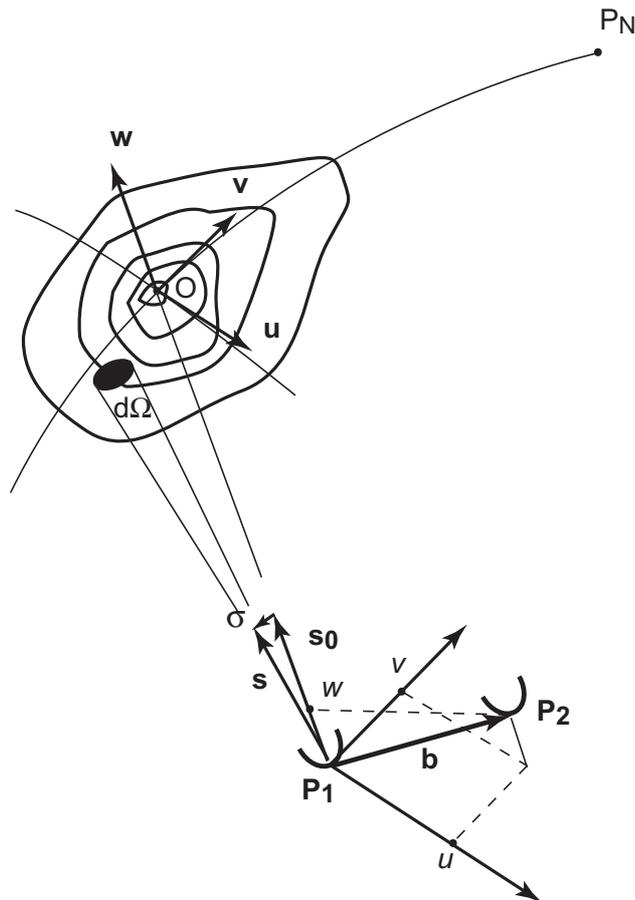


Рис. 2.7: Определение  $u, v, w$  системы координат.

Пусть в точках  $P_1$  и  $P_2$  расположены антенны интерферометра, вектор базы равен  $\mathbf{b}$  и направлен от  $P_1$  к  $P_2$ .

При изучении структуры источника следует выделить особую точку, относительно которой строится изображение. Эту точку назовем фазовым центром источника. Пусть направление на нее задается единичным вектором  $\mathbf{s}_0$ . Положение произвольной точки задается вектором

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + \boldsymbol{\sigma}. \quad (2.35)$$

Проведем через полюс мира  $P_N$  и вектор  $\mathbf{s}_0$  плоскость (круг склонений). Единичный вектор  $\mathbf{w}$  направлен вдоль вектора  $\mathbf{s}_0$ , вектор  $\mathbf{v}$  лежит в плоскости круга склонений и направлен к  $P_N$ , вектор  $\mathbf{u}$  перпендикулярен  $\mathbf{v}$  и

направлен к востоку. Правая тройка векторов  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  определяет оси системы  $u, v, w$ .

Пусть  $l, m, n$  — направляющие косинусы вектора  $\mathbf{s}$  в системе осей  $u, v, w$ . Если проекции вектора базы  $\mathbf{b}$  на эти оси равны  $u, v, w$  в длинах волн, то

$$\frac{f}{c} \mathbf{b} \cdot \mathbf{s} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{s}}{\lambda} = ul + vm + wn,$$

причем  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ , т.е. из трех величин  $l, m, n$  лишь две независимые. Значит,

$$\frac{f}{c} \mathbf{b} \cdot \mathbf{s} = ul + vm + w\sqrt{1 - l^2 - m^2}.$$

Телесный угол  $d\Omega$  в сферических координатах может быть представлен как

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\lambda,$$

где  $\theta$  — полярный угол,  $\lambda$  — долгота в системе  $u, v, w$ . Так как  $\theta = \arcsin \sqrt{l^2 + m^2}$ ,  $\lambda = \arctan(m/l)$ , то якобиан преобразования от координат  $(\theta, \lambda)$  к  $(l, m)$  дает

$$d\Omega = \frac{dldm}{\sqrt{1 - l^2 - m^2}}.$$

Так как  $\frac{f}{c} \mathbf{b} \cdot \mathbf{s}_0 = w$ , то

$$\frac{f}{c} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma} = ul + vm + w(\sqrt{1 - l^2 - m^2} - 1).$$

### 2.3.4 Функция видности и распределение интенсивности

Пусть  $V_1(t), V_2(t)$  являются напряжениями сигналов на выходе антенн. Пусть антенны сопровождают источник. Считаем, что направления осей диаграмм направленности антенн и направление на источник задаются вектором  $\mathbf{s}$ . Если  $\mathcal{E}(\mathbf{s})$  — принимаемое поле, то напряжение на выходе антенны может быть записано, используя (2.4), в виде

$$V(f) = \int_{4\pi} \int_{\Delta f} \mathcal{E}(\mathbf{s}) \sqrt{A(\mathbf{s})} K(f) df d\Omega, \quad (2.36)$$

где  $A(\mathbf{s})$  — эффективная площадь антенны,  $K(f)$  — амплитудно-частотная характеристика приемника. Преобразование Фурье-спектра по напряжению (2.36) дает возможность найти изменение сигнала на выходе антенны во времени:

$$V(t) = \iint_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(\mathbf{s}) \sqrt{A(\mathbf{s})} K(f) e^{i2\pi ft} df d\Omega, \quad (2.37)$$

считая, что  $K(f) = 0$  вне полосы  $\Delta f$  и  $\mathcal{E}(\mathbf{s}) = 0$  вне источника

Подобное выражение можно записать для второй антенны. Тогда выходной сигнал коррелятора равен

$$\begin{aligned} s_{12}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \iint_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(\mathbf{s}) \mathcal{E}^*(\mathbf{s}) \sqrt{A_1(\mathbf{s}) A_2^*(\mathbf{s})} K_1(f) K_2^*(f) \times \\ &\quad \times e^{i2\pi f t} e^{-i2\pi f (t-\tau)} dt df d\Omega = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \iint_{-\infty}^{\infty} I(\mathbf{s}) \sqrt{A_1(\mathbf{s}) A_2^*(\mathbf{s})} K_1(f) K_2^*(f) e^{i2\pi f \tau} dt df d\Omega. \end{aligned}$$

Здесь мы заменили квадрат амплитуды поля на распределение интенсивности  $I(\mathbf{s})$  ( $I(\mathbf{s}) = \mathcal{E}(\mathbf{s}) \mathcal{E}^*(\mathbf{s})$ ). При использовании одинаковых антенн ( $A_1 = A_2$ ,  $K_1 = K_2$ ) и приемников с прямоугольной полосой пропускания ( $K_1(f) = K_2(f) = 1$  в пределах полосы  $\Delta f$ ) в общем виде сигнал на выходе коррелятора можно представить в виде:

$$s_{12}(\tau) = \Delta f \int_{\Omega_s} A(\mathbf{s}) I(\mathbf{s}) \cos\left(\frac{2\pi f}{c} \mathbf{b} \cdot \mathbf{s}\right) d\Omega \quad (2.38)$$

где  $\tau = \mathbf{b} \cdot \mathbf{s}/c$ . Интеграл в (2.38) можно вычислять для всей сферы, но на практике интегрирование проводится по телесному углу  $\Omega_s$ , стягивающему излучающую область. Также предполагается, что полоса  $\Delta f$  достаточно мала, так что вариации  $A$  и  $I$  с частотой пренебрежимо малы. При выводе уравнения (2.38) считалось, что источник находится в дальней зоне интерферометра, так что фронт волны плоский. Во-вторых, считалось, что отклики от двух разных точек источника складываются независимо. Это означает, что источник пространственно некогерентный, т.е. сигналы, излучаемые разными элементами источника, некоррелированы.

Используя (2.38) и (2.35) получим:

$$\begin{aligned} s_{12}(\tau) &= \Delta f \cos\left(\frac{2\pi f}{c} \mathbf{b} \cdot \mathbf{s}_0\right) \int_{\Omega_s} A(\mathbf{s}) I(\mathbf{s}) \cos\left(\frac{2\pi f}{c} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right) d\Omega - \\ &\quad - \Delta f \sin\left(\frac{2\pi f}{c} \mathbf{b} \cdot \mathbf{s}_0\right) \int_{\Omega_s} A(\mathbf{s}) I(\mathbf{s}) \sin\left(\frac{2\pi f}{c} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right) d\Omega. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Определим функцию видности, которая есть мера пространственной когерентности. Функция видности является комплексной величиной, амплитуда которой имеет размерность спектральной плотности потока ( $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{Гц})$ ).

Гц). Она может рассматриваться как мера когерентности электрического поля, искаженная параметрами интерферометра.

Комплексная функция видности  $V$  протяженного радиоисточника, который наблюдается на интерферометре с вектором базы  $\mathbf{b}$ , равна

$$V = |V|e^{i\Phi} = \int_{\Omega_S} P(\boldsymbol{\sigma})I(\boldsymbol{\sigma})e^{-i\frac{2\pi f}{c}\mathbf{b}\cdot\mathbf{s}}d\Omega, \quad (2.40)$$

где  $I(\mathbf{s}, f, t)$  — радиояркость источника, зависящая от направления  $\mathbf{s}$ , частоты  $f$  и времени  $t$ ,  $P(\boldsymbol{\sigma}) = A(\boldsymbol{\sigma})/A_{eff}$ .

Разделяя реальную и мнимые части в (2.40), получим выражения

$$A_{eff}|V|\cos\Phi = \int_{\Omega_S} A(\boldsymbol{\sigma})I(\boldsymbol{\sigma})\cos\left(\frac{2\pi f}{c}\mathbf{b}\cdot\mathbf{s}\right)d\Omega, \quad (2.41)$$

$$A_{eff}|V|\sin\Phi = - \int_{\Omega_S} A(\boldsymbol{\sigma})I(\boldsymbol{\sigma})\sin\left(\frac{2\pi f}{c}\mathbf{b}\cdot\mathbf{s}\right)d\Omega, \quad (2.42)$$

которые подставим в (2.39). Получим

$$s_{12}(\tau) = A_{eff}|V|\Delta f \cos\left(\frac{2\pi f}{c}\mathbf{b}\cdot\mathbf{s}_0 - \Phi\right). \quad (2.43)$$

Обычной практикой является определение сначала амплитуды и фазы корреляционной функции  $s_{12}(\tau)$ , а затем амплитуды и фазы функции видности  $V$  путем калибровки интерферометра. Распределение интенсивности  $I(\boldsymbol{\sigma})$  источника может быть найдено обратным преобразованием Фурье выражения (2.40). Ясно, что для корректного восстановления величины  $I(\boldsymbol{\sigma})$  требуются измерения  $V$  в широком диапазоне значений аргумента  $\mathbf{b}\cdot\mathbf{s}/\lambda$ , который представляет собой проекцию базы на направление на источник, выраженную в длине волны.

Так как наблюдения проводятся в ограниченном диапазоне частот, то, как показано выше, интерферометр играет роль узкополосного фильтра пространственных частот  $b/\lambda$ . Поэтому согласно (2.32)

$$s_{12}(\tau) = A_{eff}|V|\Delta f \frac{\sin\pi\Delta f\tau}{\pi\Delta f\tau} \cos\left(\frac{2\pi f_0}{c}\mathbf{b}\cdot\mathbf{s}_0 - \Phi\right), \quad (2.44)$$

$f_0$  — центральная частота в полосе  $\Delta f$ . Таким образом, интерференционные лепестки модулируются функцией вида  $\sin x/x$ .

Мы рассматриваем случай, когда антенны следят за источником, поэтому отклик интерферометра пропорционален модифицированному распределению интенсивности  $I(\boldsymbol{\sigma})P(\boldsymbol{\sigma})$ . Единичный вектор в направлении произвольной точки источника равен  $\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + \boldsymbol{\sigma}$  (2.35), причем вектор смещения  $\boldsymbol{\sigma}$  лежит в картинной плоскости.

Тогда в системе осей  $u, v, w$  функция видности имеет вид  $V = V(u, v, w)$ :

$$V = \iint_{-\infty}^{\infty} I_n(l, m)P_n(l, m)e^{-i2\pi[ul+vm+w(\sqrt{1-l^2-m^2}-1)]} \frac{dldm}{\sqrt{1-l^2-m^2}}. \quad (2.45)$$

Положение точки, задаваемой единичным вектором  $\boldsymbol{\sigma}$ , определим координатами  $(l, m)$ , которые являются направляющими косинусами в системе осей  $u, v$ . Синтезируемое изображение в координатах  $(l, m)$  строится на плоскости, перпендикулярной оси  $w$ , т.е. небесная сфера проецируется на тангенциальную плоскость. Точкой касания плоскости и сферы является фазовый центр  $O$ . На тангенциальной плоскости в системе  $u, v$  компоненты вектора  $\boldsymbol{\sigma}$  пропорциональны  $l, m$ .

Для упрощения выражения (2.45), с помощью которого из функции видности вычисляется распределение интенсивности  $I(\boldsymbol{\sigma})$ , необходимо использовать следующие допущения.

Если бы все измерения могли быть выполнены антеннами, расположенными в плоскости  $u, v$ , так что  $w = 0$ , то выражение (2.45) свелось бы к двумерному преобразованию Фурье. Тогда с помощью обратного двумерного преобразования Фурье можно было бы вычислить распределение интенсивности  $I(\boldsymbol{\sigma})$ . Для этого требуется измерить значения функции видности  $V$  в широком диапазоне значений  $l, m$ . Для наземных интерферометров это достигается изменением длины и направлений баз, а также сопровождением фазового центра источника при вращении Земли. При движении антенн в пространстве вследствие вращения Земли вектор базы находится в одной плоскости только при условии, что его проекция на ось вращения равна нулю, т.е. антенны на линии восток–запад.

В общем случае для вычисления распределения интенсивности используются предположения о малых угловых размерах источника. Тогда величины  $l$  и  $m$  малы, так что квадратичными членами  $l^2, m^2$  можно пренебречь и

$$\left(\sqrt{1-l^2-m^2}-1\right)w \approx -\frac{1}{2}(l^2+m^2)w.$$

Тогда выражение (2.45) сводится к виду

$$V(u, v, w) \approx V(u, v, 0) = \iint_{-\infty}^{\infty} I_n(l, m)P_n(l, m)e^{-i2\pi[ul+vm]} \frac{dldm}{\sqrt{1-l^2-m^2}}.$$

Таким образом, для малых величин  $l, m$  значения функции видности  $V$  можно считать не зависящими от  $w$ , и из обратного преобразования Фурье находим:

$$I_n(l, m)P_n(l, m)\frac{1}{\sqrt{1-l^2-m^2}} = \iint_{-\infty}^{\infty} V(u, v)e^{i2\pi[ul+vm]}dudv. \quad (2.46)$$

В этом приближении функция видности  $V$  является двумерной функцией, зависящей только от  $u, v$ .

Выражение (2.46) представляет собой теорему Ван Циттерта-Цернике применительно к радиоастрономии и учитывает характеристики приемных антенн. Реальное распределение интенсивности  $I(\sigma)$  искажается за счет фактора  $P_n(l, m)/\sqrt{1-l^2-m^2}$ .

Введем теперь следующую систему координат: оси  $OX, OY$  лежат в плоскости экватора Земли, ось  $OZ$  направлена к северному полюсу мира  $P_N$  (рис. 2.8). Определим вектор базы как

$$\mathbf{b} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad (2.47)$$

где  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  — радиус-векторы опорных точек антенн. Ось  $OX$  лежит в плоскости местного меридиана, проходящего через полюс мира и опорную точку первой антенны (на рис. 2.8 это точка  $O$ ). Ось  $OY$  направлена таким образом, что тройка векторов  $OX, OY, OZ$  является правой.

Все вычисления векторов, а также расчет задержки будет выполняться на момент прихода волны в опорную точку первой антенны (см. главу 4).

Если вектор базы  $\mathbf{b}$  имеет компоненты  $X_\lambda, Y_\lambda, Z_\lambda$ , выраженные в длинах волн, на оси  $OX, OY, OZ$  соответственно, то преобразование от системы осей  $OX, OY, OZ$  к системе  $u, v, w$  имеет вид:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin H & \cos H & 0 \\ -\sin \delta \cos H & \sin \delta \sin H & \cos \delta \\ \cos \delta \cos H & -\cos \delta \sin H & \sin \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_\lambda \\ Y_\lambda \\ Z_\lambda \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

где  $H$  — часовой угол фазового центра источника и  $\delta$  — его склонение.

Вектор базы также можно выразить через его длину  $b = |\mathbf{b}|$ , часовой угол  $h$  и склонение  $\delta_b$  точки пересечения вектора базы и небесной сферы:

$$\begin{pmatrix} X_\lambda \\ Y_\lambda \\ Z_\lambda \end{pmatrix} = \frac{b}{\lambda} \begin{pmatrix} \cos \delta_b \cos h \\ -\cos \delta_b \sin h \\ \sin \delta_b \end{pmatrix}.$$

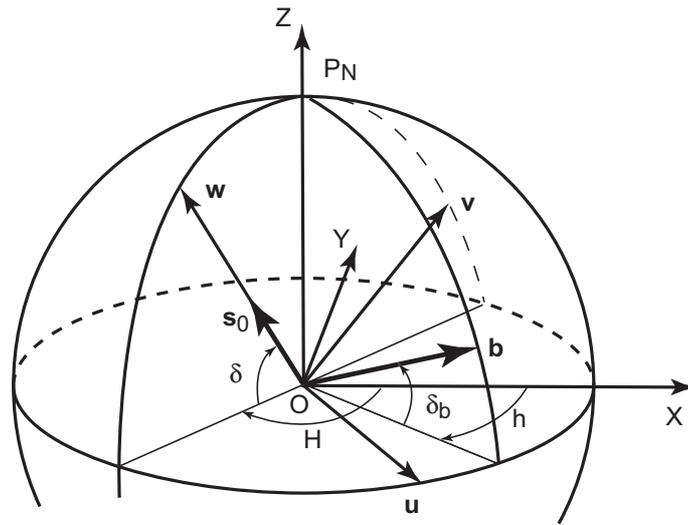


Рис. 2.8: Вектор базы в  $(u, v, w)$ -системе.

Тогда при  $b_\lambda = b/\lambda$  получим

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = b_\lambda \begin{pmatrix} \cos \delta_b \sin(H - h) \\ \sin \delta_b \cos \delta - \cos \delta_b \sin \delta \cos(H - h) \\ \sin \delta_b \sin \delta + \cos \delta_b \cos \delta \cos(H - h) \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

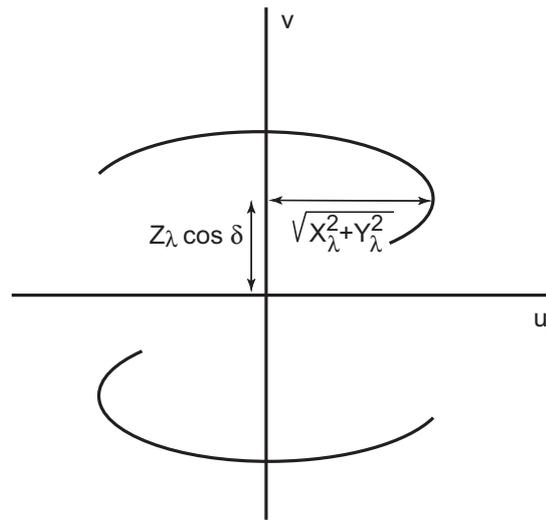
Из уравнений (2.48) и (2.49) следует, что геометрическим местом точек пространственных координат базы  $u, v$  является эллипс. В самом деле, исключая часовой угол  $H$  из уравнений (2.49) получим уравнение эллипса:

$$u^2 + \left( \frac{v - Z_\lambda \cos \delta}{\sin \delta} \right)^2 = X_\lambda^2 + Y_\lambda^2,$$

большая полуось которого равна  $\sqrt{X_\lambda^2 + Y_\lambda^2}$ , а малая —  $\sin \delta \sqrt{X_\lambda^2 + Y_\lambda^2}$ . Центр эллипса находится на оси  $v$  в точке  $(u, v) = (0, Z_\lambda \cos \delta)$ .

Поскольку  $I(l, m)$  — реальная функция, то  $V(-u, -v) = V^*(u, v)$ . Это значит, что коррелятор обеспечивает измерение функции видности сразу в двух точках на  $(u, v)$  плоскости (рис. 2.9).

Если наблюдения проводятся в некотором интервале часовых углов, то проекция вектора базы описывает на небе дугу эллипса, называемый годографом. Параметры его определяются параметрами базы, склонением источника и часовыми углами. Нижняя кривая на рис. 2.9 соответствует обратному направлению вектора базы; в точках нижней кривой вычисляются значения функции видности, комплексно сопряженные значениям функции в точках верхней кривой. Оба эллипса вырождаются в один только в случае  $Z_\lambda = 0$ .

Рис. 2.9: Годограф на  $(u, v)$ -плоскости.

На практике функция  $V(u, v)$  не может быть измерена в любой точке на  $(u, v)$ -плоскости, а измеряется лишь на некотором множестве дискретных точек. Можно ввести функцию дискретизации (или передаточную функцию)  $S(u, v)$ , которая равна 1 в точках, где  $V(u, v)$  измеряется, и равна 0 в других точках. При планировании наблюдений важно, чтобы функция дискретизации заполняла  $(u, v)$ -плоскость как можно более равномерно и полно. В результате распределение яркости, полученное из интерферометрических наблюдений с функцией дискретизации  $S(u, v)$  равно:

$$I^D(l, m) = \iint_{-\infty}^{\infty} V(u, v) S(u, v) e^{i2\pi(ul+vm)} dudv,$$

которое называется «грязным» («dirty») изображением. Функция  $I^D(l, m)$  является двумерной сверткой между истинным изображением  $I(l, m)$  и функцией рассеяния точки интерферометра

$$B(l, m) = \iint_{-\infty}^{\infty} S(u, v) e^{i2\pi(ul+vm)} dudv,$$

которая называется также синтезированным лучом, т.е.  $I^D(l, m) = I(l, m) \star B(l, m)$ . Для вычисления истинного распределения яркости  $I(l, m)$  требуется обращение свертки двух функций.

Детальный анализ восстановления функции видности проводится в [30].

### 2.3.5 Чувствительность интерферометра

Чувствительность является одной из важнейших характеристик радиоинтерферометра. Анализ чувствительности двухэлементного корреляционного интерферометра был выполнен многими авторами (см., например, [32, 79, 220, 229]).

Чувствительность отдельной антенны определяется самым слабым радиоисточником, который может быть обнаружен, и поэтому связана с шумом, регистрируемым на выходе приемной системы. Шум представляет собой сумму полезного сигнала, который имеет шумовую природу, а также посторонних сигналов, попадающих в телескоп, и шума самой приемной системы. Обычно полезный сигнал, который измеряется, проявляется в изменении уровня мощности на выходе приемника при прохождении источника через диаграмму направленности. При слежении же антенной за источником регистрируемая плотность потока из-за статистических свойств радиоизлучения будет флуктуировать случайным образом около среднего значения. Поэтому значения плотности потока, измеренные за конечный промежуток времени, могут различаться для разных моментов времени. Эти вариации должны быть отделены от флуктуаций шума, вносимых компонентами приемной системы, например, изменениями коэффициента усиления усилителя.

Статистический подход показывает, что среднеквадратичная ошибка определения средней мощности на выходе приемника обратно пропорциональна корню квадратному из времени накопления  $t_c$  или интегрирования сигнала: среднее  $N$  последовательных измерений мощности каждое длительностью  $t_c$  секунд будет в  $\sqrt{N}$  точнее, чем одно измерение с накоплением  $t_c$  секунд.

Обычно спектр мощности источника можно считать плоским в пределах полосы пропускания приемника. В этом случае среднеквадратичная ошибка определения средней мощности, приходящейся на единичную полосу частот и усредненной за определенный промежуток времени, будет обратно пропорциональна корню квадратному из ширины полосы приемника  $\Delta f$ . Среднее измерение мощности, выполненное одновременно  $N$  приемниками, работающими в  $N$  смежных частотных полосах (что соответствует измерению мощности одним приемником с  $N$ -кратной полосой), будет в  $\sqrt{N}$  раз более точным, чем отдельное измерение в одной из  $N$  полос.

Так как величина флуктуаций шума пропорциональна самой средней мощности, то среднеквадратичная ошибка  $\sigma_T$  ( $^{\circ}\text{K}$ ) при измерении приемником с полосой  $\Delta f$  Гц и времени интегрирования  $t_c$  с определяется выра-

жением

$$\sigma_T = M \frac{T}{\sqrt{\Delta f t_c}}. \quad (2.50)$$

Здесь  $T$  — полная мощность шумов в системе  $T = T_{sys}$  (°К). Коэффициент  $M$  (постоянная чувствительности) определяется конкретным типом приемника. В частности, для наиболее часто используемых квадратичных детекторов  $M = 1$ . Для других приемников значения постоянной чувствительности приводятся в табл. 7.3 [18].

Для интерферометра определение чувствительности связано, во-первых, с возможностью обнаружения источника за время когерентного накопления (см. стр. 99), и, во-вторых, с возможностью обнаружения структурных деталей протяженного источника.

Для определения чувствительности интерферометра используем рис. 2.6. Пусть геометрическая площадь первого телескопа равна  $A_1$ , коэффициент использования площади антенны  $\eta_{a_1}$  (2.6). Усилитель имеет коэффициент усиления  $G_1$  и полосу приема  $\Delta f$ . Параметры второй антенны —  $A_2$  и  $\eta_{a_2}$ , усилителя —  $G_2$  и  $\Delta f$ .

Если телескопы направлены на участок небесной сферы, который не содержит радиоисточников, то на выходе усилителей тем не менее будет зарегистрирован шум. Источником шума являются микроволновое фоновое излучение с температурой 3°К, тепловое излучение атмосферы, земли, различных сооружений и т.д. Излучение может поступать в антенну как через главный лепесток, так и через боковые и задние лепестки диаграммы направленности. Кроме этого собственным шумом обладает и приемник (в нашем случае усилитель). Будем считать, что шум является белым. Мощность шума на выходе усилителя  $W_N$  можно выразить через температуру системы  $T_{sys}$ :

$$W_N = GkT_{sys}\Delta f. \quad (2.51)$$

Таким образом, температура системы соответствует температуре сопротивления, подключенного на вход приемника. Если антенна наведена на источник, коэффициент усиления  $G$  не меняется, то на выходе усилителя мощность сигнала равна  $W_N + W_a$ , где  $W_a$  — дополнительная мощность, собираемая антенной с радиоисточника. Мощность  $W_a$  связана с антенной температурой  $T_a$  выражением (2.12):

$$W_a = GkT_a\Delta f. \quad (2.52)$$

В данном случае температура системы  $T_{sys}$  определяется только аддитивными шумами. Полезный сигнал не дает вклада в  $T_{sys}$ , хотя в некоторых работах [18] считается, что температура системы равна сумме антенной и

шумовой температур. Так как в большинстве случаев  $T_a \ll T_{sys}$ , то принципиальной разницы нет.

При наблюдении точечного источника антенная температура определяется выражением (2.13). Для антенн с указанными выше параметрами имеем

$$T_{ai} = \eta_{ai} \frac{A_i S_s}{2k} = K_i S_s, \quad (2.53)$$

где  $i = 1, 2$ . Определим коэффициент  $K = T_a/S_s$  [°К/ян], который из (2.53) равен

$$K_i = \frac{\eta_{ai} A_i}{2k}. \quad (2.54)$$

Видно, что коэффициент  $K$  может быть назван коэффициентом усиления антенны, так как он показывает насколько градусов Кельвина увеличивается антенная температура при увеличении плотности потока источника на 1 ян.

Часто для оценки качества антенны используется параметр SEFD (system equivalent flux density — эквивалентная плотность потока системы):

$$SEFD = \frac{T_{sys}}{K}. \quad (2.55)$$

Параметр SEFD определяется, таким образом, через эффективную площадь антенны и шумовую температуру, т.е. является мерой качества системы. Он может быть получен путем измерения изменений принимаемой мощности при наведении и отведении антенны на источник с известной плотностью потока. Измерения шумовой температуры системы и коэффициента усиления антенны по отдельности неоднозначны, поскольку зависят от калибровки системы, т.е. от источника шума с известной температурой. При измерении SEFD ошибки калибровки исключаются.

В таблице 2.1 (адаптирована из [98]) приводятся параметры SEFD для телескопов различных организаций для разных длин волн.

Пусть напряжение  $v_i$  на выходе антенны с номером  $i$  является суммой напряжений:  $s_i$  от источника и  $n_i$  от шума ( $i = 1, 2$ )

$$v_i(t) = s_i(t) + n_i(t).$$

Мощность на выходе приемника определяется константой  $a_i$ , которая определяется коэффициентом усиления приемника, умноженной на математическое ожидание квадрата регистрируемого напряжения:

$$W_i = a_i \langle v_i^2 \rangle.$$

Таблица 2.1: Параметры SEFD для некоторых телескопов

Организация	Место расположения	Диаметр	SEFD (Ян)
			для длин волн $\lambda$ 21 18 6 5 4 1 0,7 см
MPIfR (DE)	Effelsberg	100	20 19 20 55 20 140 600
ASTRON (NL)	WSRT	14 × 25	30 30 60 . 120 . .
JBO (UK)	Lovell	76	35 35 25 25 55 —
	Mk2	25	350 320 320 910 . 910 ..
	Cambridge	32	220 212 136 136 . 720 ..
IRA (IT)	Medicina	32	390 582 296 900 270 1090 2800
	Noto	32	820 784 260 . 770 2500 3000
	Sardinia	64	. . . . . ..
OSO (SE)	Onsala-85	25	450 390 600 1500 . . ..
	Onsala-60	20	. . . .1630 1380 1310
SHAO (CN)	Shanghai	25	. 1090 520 . 590 1606 ..
UAO (CN)	Urumqi	25	1068 1068 353 . 396 2950 ..
TCfA (PL)	Torun	32	250 230 250 300 . . ..
OAN (ES)	Yebes 14-m	14	. . . .3300 . 4160
	Yebes 40-m	40	. . . . . . ..
MRO (FI)	Metsahovi	14	. . . . .2608 4500
NAIC (USA)	Arecibo	305	3 4 6 9 . . ..
HRAO (ZA)	Hartebeesthoek	26	. 450 700 800 940 . ..
IfAG (DE)	Wettzell	20	. . . .750 . ..
DSN (USA ES)	Robledo 70-m	70	. 42 . . 23 100 ..
	Robledo 34-m	34	. . . .88 . ..
CGS ASI (IT)	Matera	20	. . . .900 . ..
NMA (NO)	Ny-Alesund	20	. . . .1255 . ..
CrAO (UA)	Simeiz	22	. 1600 . .3000 . .1200 3000 ..

Значит,

$$W_i = a_i \langle (s_i + n_i)^2 \rangle = G_i^2 k (T_{ai} + T_{sys_i}) \Delta f = G_i^2 k (K_i S_s + T_{sys_i}) \Delta f, \quad (2.56)$$

считая, что напряжения от источника и от шума некоррелированы. Поэтому математическое ожидание от их произведения равно нулю. Предположим, что плотность потока  $S_s$  одинакова для обеих антенн, т.е. источник является точечным. Тогда на выходе коррелятора средняя мощность сигнала равна

$$\begin{aligned} W_{ij} &= \eta \sqrt{a_i a_j} \langle (s_i + n_i)(s_j + n_j) \rangle = \eta \sqrt{a_i a_j} \langle s_i s_j \rangle = \\ &= \eta G_i G_j \sqrt{K_i K_j} k \Delta f S_c. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Здесь  $S_c$  — коррелированная плотность потока вместо  $S_s$  из-за того, что «точечный» источник для отдельной антенны может разрешаться на интерферометре. Коэффициент  $\eta$  учитывает потери в мощности при преобразовании сигнала в приемной и регистрирующей аппаратуре [30].

Чтобы вычислить отношение сигнал/шум, надо найти среднеквадратичные флуктуации мощности сигнала на выходе коррелятора. Для этого сначала надо вычислить флуктуации для одного отсчета, потом уменьшить их на квадратный корень из общего числа отсчетов  $N$ . Будем считать, что в соответствии с теоремой Найквиста  $N = 2\Delta f t_c$ , где  $t_c$  — время интегрирования сигналов в корреляторе. Из определения моментов случайной функции следует, что дисперсия  $D[W_{ij}] = \sigma^2(W_{ij})$  равна

$$\sigma^2(W_{ij}) = \eta^2 a_i a_j \langle [(s_i + n_i)(s_j + n_j)]^2 \rangle - W_{ij}^2.$$

Математическое ожидание произведения четырех случайных функций можно представить в виде суммы математических ожиданий произведений двух функций (выражение 19.8-21 в [17]):

$$\begin{aligned} \sigma^2(W_{ij}) &= \eta^2 a_i a_j \left[ 2 \langle (s_i + n_i)(s_j + n_j) \rangle^2 + \langle (s_i + n_i)^2 \rangle \langle (s_j + n_j)^2 \rangle \right] - \\ &\quad - \eta^2 (G_i G_j)^2 K_i K_j (k \Delta f S_c)^2. \end{aligned}$$

Используя (2.56) и (2.57), получим

$$\begin{aligned} \sigma^2(W_{ij}) &= 2\eta^2 (G_i G_j)^2 K_i K_j (k \Delta f S_s)^2 + \eta^2 (G_i G_j)^2 k^2 \Delta f^2 \times \\ &\quad \times (K_i S_s + T_{sys_i})(K_j S_s + T_{sys_j}) - \eta^2 (G_i G_j)^2 K_i K_j (k \Delta f S_c)^2 = \\ &= \eta^2 (G_i G_j)^2 (k \Delta f)^2 (K_i K_j S_c^2 + K_i K_j S_s^2 + K_i S_s T_{sys_i} + \\ &\quad + K_j S_s T_{sys_j} + T_{sys_i} T_{sys_j}). \end{aligned}$$

Для того, чтобы выразить вариации шума в янских необходимо вычислить квадратный корень из  $\sigma^2(W_{ij})$ , затем поделить на коэффициент  $G_i G_j \sqrt{K_i K_j} k \Delta f$ . Наконец, для вычисления стандартного отклонения от средней мощности необходимо поделить результат на квадратный корень из числа отсчетов, т.е. на  $\sqrt{N}$ :

$$s_{ij} = \frac{\eta}{\sqrt{2\Delta f t_c}} \sqrt{S_c^2 + S_s^2 + S_s \left( \frac{T_{sysi}}{K_i} + \frac{T_{sysj}}{K_j} \right) + \frac{T_{sysi} T_{sysj}}{K_i K_j}}. \quad (2.58)$$

Если характеристики антенн и приемников одинаковы, то выражение (2.58) упрощается:

$$s_{ij} = \frac{\eta}{\sqrt{2\Delta f t_c}} \sqrt{S_c^2 + S_s^2 + S_s \frac{2T_{sys}}{K} + \frac{T_{sys}^2}{K^2}}. \quad (2.59)$$

В случае наблюдения сильного источника ( $S_s \gg T_{sys}/K$ ) (обычно в этом случае  $S_s \gg S_c$ ) и получим:

$$s_{ij} = \eta \frac{S_s}{\sqrt{2\Delta f t_c}} = \eta \frac{1}{\sqrt{2\Delta f t_c}} \cdot \frac{2kT_a}{\eta_a A}. \quad (2.60)$$

Предположим, что наблюдается слабый источник:  $S_s \ll T_{sys}/K$ . Тогда получим:

$$s_{ij} = \frac{\eta}{\sqrt{2\Delta f t_c}} \sqrt{\frac{T_{sysi} T_{sysj}}{K_i K_j}} = \frac{\eta}{\sqrt{2\Delta f t_c}} \sqrt{SEFD_i SEFD_j}. \quad (2.61)$$

Для одинаковых антенн:

$$s_{ij} = \frac{\eta}{\sqrt{2\Delta f t_c}} SEFD = \frac{\eta}{\sqrt{2\Delta f t_c}} \cdot \frac{2kT_{sys}}{\eta_a A}. \quad (2.62)$$

Таким образом, чувствительность корреляционного интерферометра хуже в  $\sqrt{2}$  раз чувствительности одиночной антенны.

## Глава 3

# Оборудование радиointерферометра со сверхдлинной базой

Блок-схема радиointерферометра со сверхдлинной базой показана на рисунке 3.1.

Антенна геодезического радиointерферометра используется не только для приема радиосигналов, но и для определения опорной точки, которая является точкой пересечения осей телескопа (см. § 4.4) и координаты которой входят в формулы для вычисления вектора базы и, следовательно, задержки. Учитывая это, к антенне и фундаменту антенны предъявляются особые требования. Конструкция антенны должна обеспечивать ее жесткость. Конструкция фундамента вместе с жесткостью антенны должны гарантировать стабильность положения опорной точки на протяжении десятилетия или даже десятков лет.

Для изучения локальных движений антенны пункт РСДБ должен быть оборудован двумя-тремя геодезическими приемниками GPS/ГЛОНАСС. Для вычисления задержки в тропосфере на пункте должна быть установлена автоматизированная метеостанция для измерения давления, влажности и температуры. Измерения температуры необходимы также для вычисления термического расширения фундамента и антенны и изменения координат опорной точки вследствие этого. Для учета неприливных смещений опорной точки, в частности, из-за грунтовых вод, атмосферной нагрузки, на многих пунктах РСДБ устанавливаются гравиметры.

Как следует из формул (2.61-2.62), чувствительность интерферометра зависит от площади антенн и шумовой температуры системы. Современные малозумящие усилители (МШУ) имеют шумовые температуры 20 –

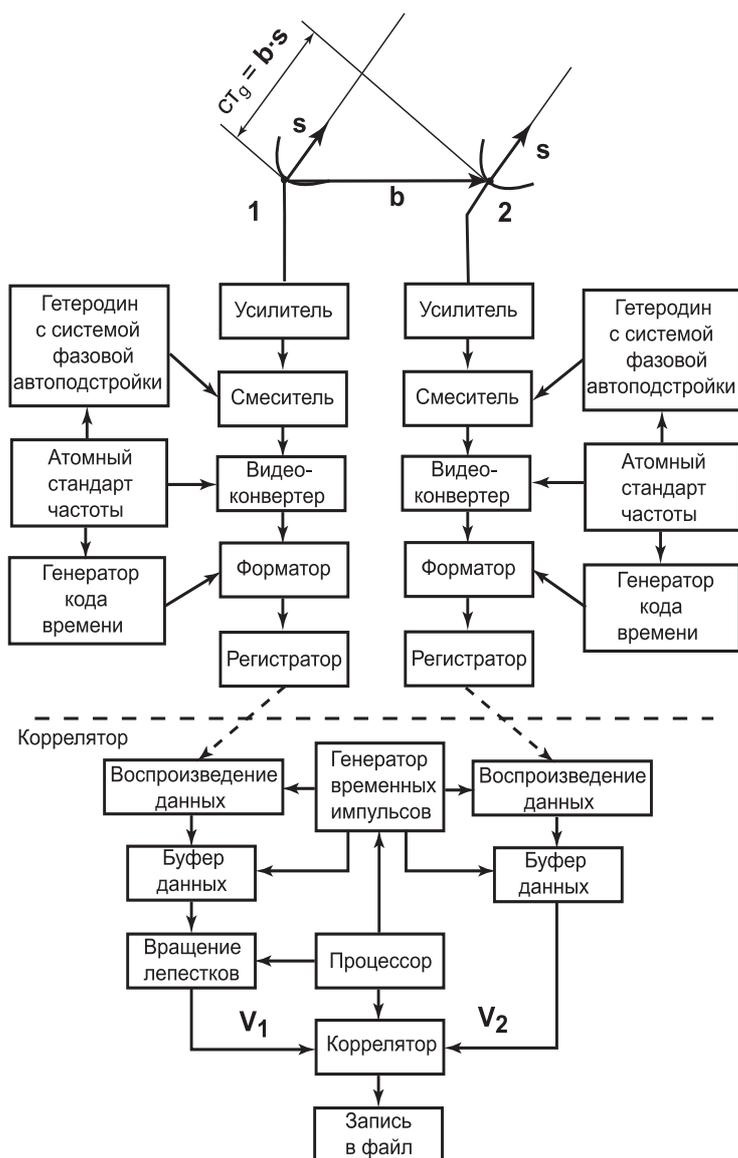


Рис. 3.1: Схема радиointерферометра со сверхдлинной базой.

30°K, что позволяет использовать в новом проекте VLBI2010 сравнительно малые антенны диаметром 10–15 м (§ 3.7). Из-за широкой полосы регистрации чувствительность интерферометров будет достаточна для наблюдения источников с потоками 0, 1 – 0, 2 ян, т.е. большинства источников из списка ICRF.

Кроме низкой шумовой температуры усилители должны обладать широкой полосой пропускания, так как от величины полосы пропускания зависит точность определения групповой задержки.

Радиосигналы принимаются антенной на высокой частоте  $f$  (radio frequency — RF), усиливаются в полосе  $\Delta F$  малошумящим усилителем и смешиваются с высокостабильным сигналом от гетеродина (local oscillator —

LO)  $f_{LO}$ , который сфазирован с опорным сигналом от стандарта частоты ( $f_0 = 5$  МГц). Эта операция называется гетеродинированием. В результате гетеродинирования RF сигнал преобразуется к сигналу промежуточной частоты (intermediate frequency — IF), после чего он может быть передан по коаксиальному кабелю с относительно малыми потерями от антенны до лабораторного корпуса на расстояние до нескольких десятков метров. Гетеродинирование выполняется на антенне, т.к. передать высокочастотный RF сигнал на такое расстояние по коаксиальному кабелю сложно из-за большого поглощения.

Благодаря тому, что сигнал гетеродина сфазирован с опорным сигналом от стандарта частоты, информация о фазе RF сигнала сохраняется при гетеродинировании. Это — ключевой момент в радиоинтерферометрии.

Современные оптические кабели позволяют передавать IF сигналы в очень широкой полосе частот (1–2 ГГц) без значительных потерь на большие расстояния, что будет использоваться в проекте VLBI2010.

Далее IF сигнал в полосе  $\Delta F$  разделяется на несколько частотных каналов (рис. 3.2).

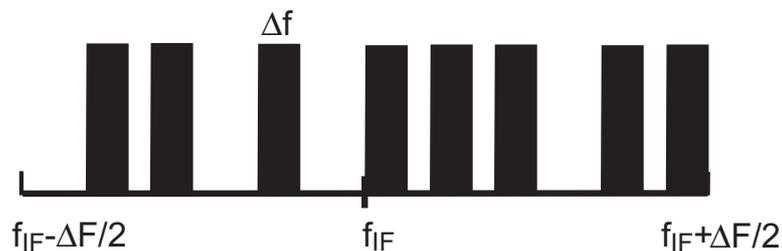


Рис. 3.2: Схема частотных каналов в полосе промежуточного сигнала.

Каждый частотный канал имеет узкую полосу  $\Delta f$  — от 0 до нескольких мегагерц, а сигнал в такой полосе называется видеосигналом. Разбиение полосы  $\Delta F$  на каналы выполняется видеоконвертером. Для этого также используется гетеродинирование с использованием фазированного сигнала, что сохраняет информацию о фазе RF сигнала в каждой из видеополос. Для фазирования используется опорный сигнал частотой  $f_0$  от стандарта частоты.

Название «видеосигнал» сохранилось со времени, когда для записи использовали видеомэгнитофоны (см. ниже), и полоса записи была такой же, как у телевизионных сигналов.

Видеоконвертер содержит фильтры, с помощью которых после гетеродинирования можно выделить либо верхнюю, либо нижнюю полосу.

Затем сигнал в каждой из видеополос преобразуется из аналогового сигнала в цифровой с помощью аналого-цифрового преобразователя (АЦП).

Частота дискретизации АЦП определяется шириной видеополосы и равна частоте Найквиста, т.е.  $2\Delta f$ . Для видеополосы от 0 до 2 МГц частота дискретизации равна 4 МГц. Сигнал такой частоты также получается из опорного сигнала стандарта частоты. Оцифровка аналогового сигнала зависит от разрядности АЦП: в простейшем случае выполняется 1-битное квантование. Часто в РСДБ используется и двухбитное квантование.

Двоичная одно- или двухбитная последовательность вместе с необходимыми метками времени (специально кодируемая информация о времени) формируется форматором и представляет собой готовый сигнал для записи. Интерфейс сигнала заранее согласуется IVS с производителями оборудования (VLBI Standard Interface – VSI) [227].

Далее цифровой сигнал подается на регистратор и записывается на магнитную ленту или диск.

### 3.1 Малошумящий приемник

Радиоастрономический приемник предназначен для обнаружения радиоизлучения небесных тел. В большинстве случаев излучение имеет свойства шума, и часто его характеристики не отличаются от характеристик шума приемника или фонового излучения, попадающего на вход приемника через боковые лепестки диаграммы направленности. Уровень мощности на входе приемника, создаваемый небесными радиоисточниками, очень мал и находится в пределах  $10^{-15} - 10^{-20}$  Вт. Мощность фонового излучения на входе приемника может значительно выше; поэтому, радиоастрономический приемник должен обладать высокой чувствительностью и стабильностью.

Радиоастрономические приемники имеют много общего с обычными приемниками.

Первыми приемниками, которые использовали К. Янский и Г. Ребер, были когерентными радиометрами. Эти радиометры сохраняют фазу принимаемой волны и чувствительны к одной поляризации. Схема когерентного радиометра повторяет схему супергетеродинного приемника. В такой схеме частота высокочастотного сигнала преобразуется к более низкой частоте, после чего сигнал усиливается, фильтруется и передается по кабелям для дальнейшей обработки.

Можно разделить когерентный радиометр на две части: «переднюю» («front end») и «заднюю» («back end»). Обычно в «передней» части радиометра производится обработка сигнала на высокой частоте (RF), тогда как в «нижней» части — сигнала на промежуточной частоте (IF).

Блок-схема радиоастрономического супергетеродинного приемника показана на рис. 3.3.

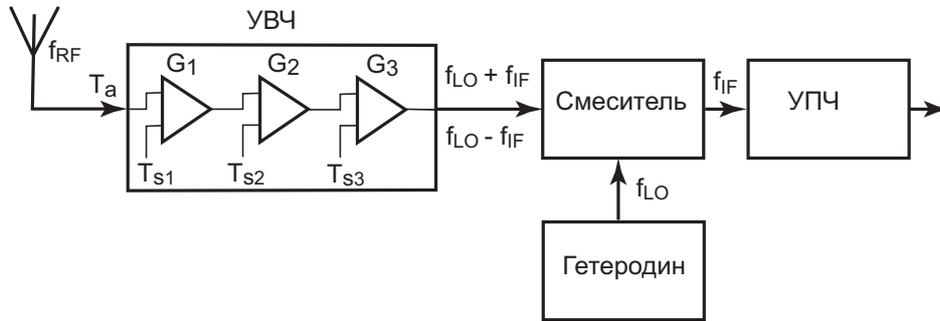


Рис. 3.3: Радиоастрономический супергетеродинный приемник.

Сигнал на высокой частоте  $f_{RF}$  в широкой полосе частот  $\Delta f_{RF}$  (пропускаемой антенной) поступает в приемник от антенны и предварительно усиливается услителем высокой частоты (УВЧ), имеющим коэффициент усиления УВЧ порядка 20 – 30 дБ, тогда как коэффициент усиления всего приемника – 80 – 100 дБ.

Такое большое усиление можно получить только с помощью каскадного усилителя. Если усиление  $i$ -го каскада равно  $G_i$ , то общее усиление  $n$  каскадов равно

$$G = \prod_{i=1}^n G_i.$$

Ответ на вопрос: какова будет суммарная шумовая температура  $T_S$  усилителя, если каждый каскад добавляет шумовую температуру  $T_{Si}$ , приводит к принципу построения малошумящего усилителя.

Пусть на входе первого каскада регистрируется антенная температура  $T_a$ . Тогда в соответствии с выражением (2.12) для единичной полосы частот мощность входного сигнала равна ( $k$  – постоянная Больцмана):

$$W_0 = kT_a,$$

а мощность на выходе  $i$ -го каскада будет равна

$$W_i = (W_{i-1} + kT_{Si})G_i.$$

Так как мощность сигнала на выходе усилителя равна

$$W_n = k(T_a + T_S) \prod_{i=1}^n G_i,$$

то решая это уравнение относительно  $T_S$ , получим формулу Фрииса

$$T_S = T_{S1} + \frac{1}{G_1} T_{S1} + \frac{1}{G_1 G_2} T_{S2} + \dots + \frac{1}{G_1 G_2 \dots G_{n-1}} T_{Sn}.$$

Итак, если необходимо использовать несколько каскадов усиления, то из формулы следует, что их надо располагать так, что первым каскадом должен быть каскад с самой низкой шумовой температурой, второй и последующие каскады могут иметь более высокие шумовые температуры. Именно поэтому УВЧ следует охлаждать.

Преобразование частоты сигнала необходимо по двум причинам. Во-первых, такое преобразование позволяет избежать попадания выходного сигнала на вход УВЧ. Такой эффект возможен в системе с очень большим коэффициентом усиления ( $10^8 - 10^{10}$ ) или 80 – 100 дБ. Даже очень малая часть мощности выходного сигнала в случае отражения от несогласованной нагрузки приемника может, попав на вход системы, привести к нестабильной работе. Во-вторых, с помощью преобразования можно выбрать частоту, с которой удобнее всего работать. Преобразование частоты выполняется смещением высокочастотного сигнала с монохроматическим сигналом от гетеродина.

В смесителе преобразуемый сигнал вместе с сигналом гетеродина подается на элемент с нелинейной вольт-амперной характеристикой. Таким элементом может быть диод, ток  $I$  через который выражается через приложенное напряжение  $U$  степенным рядом:

$$I = a_0 + a_1 U + a_2 U^2 + a_3 U^3 + \dots \quad (3.1)$$

Предположим, что напряжение  $U$  является суммой напряжений гетеродина  $b_1 \sin(2\pi f_{LO} t + \varphi_{LO})$  и высокочастотного сигнала, одна из гармоник которого есть  $b_2 \sin(2\pi f_{RF} t + \varphi_{RF})$ . Изменение тока вследствие квадратичного изменения напряжения будет равно:

$$\begin{aligned} I = a_2 U^2 &= a_2 [b_1 \sin(2\pi f_{LO} t + \varphi_{LO}) + b_2 \sin(2\pi f_{RF} t + \varphi_{RF})]^2 = \\ &= a_2 b_1^2 \sin^2(2\pi f_{LO} t + \varphi_{LO}) + a_2 b_2^2 \sin^2(2\pi f_{RF} t + \varphi_{RF}) + \\ &+ 2a_2 b_1 b_2 \sin(2\pi f_{LO} t + \varphi_{LO}) \cdot \sin(2\pi f_{RF} t + \varphi_{RF}). \end{aligned}$$

Используя тригонометрические формулы, получим

$$\begin{aligned}
 I = & \frac{1}{2}a_2(b_1^2 + b_2^2) - \\
 & - \frac{1}{2}a_2b_1^2 \sin(4\pi f_{LO}t + 2\varphi_{LO} + \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2}a_2b_2^2 \sin(4\pi f_{RF}t + 2\varphi_{RF} + \frac{\pi}{2}) + \\
 & + a_2b_1b_2 \sin[2\pi(f_{RF} - f_{LO})t + (\varphi_{RF} - \varphi_{LO} + \frac{\pi}{2})] \\
 & - a_2b_1b_2 \sin[2\pi(f_{RF} + f_{LO})t + (\varphi_{RF} + \varphi_{LO} + \frac{\pi}{2})].
 \end{aligned}$$

Таким образом, ток через диод представляет суперпозицию постоянно-го сигнала и нескольких компонент, включая вторые гармоники сигналов  $2f_{RF}$  и  $2f_{LO}$ , сигналы с разностной  $f_{RF} - f_{LO}$  и суммарной  $f_{RF} + f_{LO}$  частотами.

Используя полосовой фильтр можно выделить сигнал на нужной частоте, подавив при этом сигналы на других частотах. В большинстве случаев при преобразовании (3.1) частота сигнала понижается:  $f_{IF} = f_{RF} - f_{LO}$ .

В реальных приемниках (рис. 3.3) на смеситель подаются сигналы, пропущенные через фильтры с центральными частотами  $f_{LO} - f_{IF}$ ,  $f_{LO} + f_{IF}$ . Эти диапазоны называются соответственно нижней и верхней боковыми полосами; они естественно лежат в пределах полосы пропускания антенны  $\Delta f_{RF}$  (рис. 3.4). Фильтры определяют ширину полосы  $\Delta f_{IF}$  этих сиг-

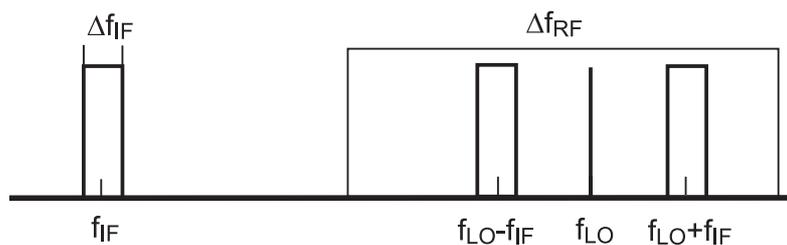


Рис. 3.4: Верхняя и нижняя полосы сигнала, преобразуемые с помощью гетеродинирования к сигналу промежуточной частоты.

налов и, следовательно, ширину полосы сигнала промежуточной частоты. Смеситель преобразует нижнюю и верхнюю боковые полосы в одну полосу на промежуточной частоте. Если требуется принимать только нижнюю или только верхнюю полосу, то нежелательную из них можно устранить с помощью дополнительного фильтра.

## 3.2 Гетеродин и фазовая стабильность

Гетеродин — важнейший элемент радиointерферометра. Чтобы когерентность сигналов, принимаемых на удаленных антеннах, сохранялась, частоты гетеродинов должны быть синхронизованы по фазе. Для этого используются высокостабильные сигналы атомных стандартов частоты, которые подаются на гетеродины и используются для подстройки фазы. Затем можно синтезировать частоты, необходимые для работы смесителей.

Кроме фазовых ошибок, вносимых в опорный сигнал собственно атомным стандартом частоты, в сигнале гетеродина, который подается на смеситель, будут присутствовать ошибки самого гетеродина, а также ошибки, возникающие при передаче опорного сигнала 5/10 МГц по кабелям из лабораторного корпуса до антенны. Минимизация фазовых ошибок в данном случае сводится главным образом к снижению вариаций длины кабелей из-за температурных колебаний.

В последние годы в радиointерферометрии со сверхдлинной базой стали активно использоваться оптоволоконные кабели. Кроме передачи данных с пунктов РСДБ на коррелятор (e-VLBI), оптоволоконные кабели стали использоваться для передачи опорных сигналов [196]. Температурный коэффициент расширения таких кабелей значительно ниже, чем у медного кабеля. Кроме того, широкая полоса пропускания оптоволоконного кабеля позволяет передавать опорные сигналы с частотами 5 или 10 МГц с на большие расстояния без внесения дополнительных шумов. В одном из первых экспериментов [196] опорный сигнал с частотой 10 МГц передавался на расстояние 880 м от лабораторного корпуса до 6-й антенны в Нобеяме (Япония). Ограничиваясь потерей когерентности на уровне 2%, фазовая нестабильность сигнала после передачи была оценена величиной  $\sim 4 \times 10^{-15}$  за 1000 с накопления.

Дадим теперь определения параметров: нестабильности и время когерентности [165].

Каждый атомный стандарт частоты определяет собственную шкалу атомного времени. Время находится интегрированием стабильной частоты, определяемой частотой квантового перехода между конкретными энергетическими состояниями атомов цезия (Cs), водорода (H), рубидия (Rb), ртути (Hg) и др. Поэтому стандарты частоты бывают цезиевые, водородные, рубидиевые и др.

За единицу измерения времени принимается *атомная секунда* (секунда СИ), определяемая в соответствии с резолюцией XIII конференции Международного комитета мер и весов (1967 г.) как промежуток времени, в течение которого совершается 9192631770 колебаний, соответствующих ча-

стоте излучения атомом  $^{133}\text{Cs}$  при резонансном переходе между энергетическими уровнями сверхтонкой структуры основного состояния при отсутствии внешних магнитных полей на уровне моря.

При интегрировании частоты начало шкалы времени не определено. Следовательно, нуль-пункты различных шкал атомного времени могут не совпадать. Кроме того разность нуль-пунктов шкал может изменяться из-за случайных и систематических погрешностей (или вариаций хода) атомных стандартов частоты. Со случайными и систематическими вариациями частоты связаны две важнейшие характеристики атомных часов: нестабильность и точность.

Нестабильность частоты определяется *дисперсией Аллана*.

В идеальном случае на выходе генератора частоты имеется синусоидальный сигнал вида:

$$V(t) = V_0 \cos 2\pi\nu_0 t, \quad (3.2)$$

$\nu_0$  — номинальная частота генератора. Однако в действительности сигнал представляется выражением

$$V(t) = V_0 \cos[2\pi\nu_0 t + \varphi(t)], \quad (3.3)$$

где  $\varphi(t)$  — фаза, меняющаяся со временем случайным образом. Здесь для простоты мы не рассматриваем флуктуации амплитуды сигнала.

Мгновенная частота генератора определяется производной по времени от аргумента  $\Phi(t) = 2\pi\nu_0 t + \varphi(t)$  в выражении (3.3):

$$\nu(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi}{dt} = \nu_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi}{dt} = \nu_0 + \frac{1}{2\pi} \dot{\varphi}.$$

Определим относительное отклонение частоты генератора от его номинальной частоты следующим образом:

$$y(t) = \frac{\nu(t) - \nu_0}{\nu_0} = \frac{1}{2\pi\nu_0} \frac{d\varphi}{dt}. \quad (3.4)$$

Для атомных стандартов частоты справедливо соотношение:  $|\dot{\varphi}(t)/2\pi\nu_0| \ll 1$ , т. е. относительное изменение частоты значительно меньше единицы.

Так как время находится интегрированием частоты, то добавление к генератору счетчика (интегратора) количества периодов сигнала (3.3) превращает это устройство в часы. Значит, интеграл

$$x_k(t) = \int_{t_k}^{t_k+\tau} y(t') dt'$$

представляет собой величину, на которую уходят или отстают часы на промежутке времени от  $t_k$  до  $t_k + \tau$ , относительно идеального стандарта времени, в основе которого лежит генератор сигнала (3.2).

Среднее относительное отклонение частоты генератора на  $k$ -ом интервале, продолжительность которого равна  $\tau$ , есть

$$\bar{y}_k = \frac{x_{k+1} - x_k}{\tau}. \quad (3.5)$$

Здесь мы предполагаем, что измерения выполняются с периодом  $\tau$ , т. е. без потери информации между соседними интервалами.

Тогда дисперсия Аллана равна:

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2} \langle (\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2 \rangle, \quad (3.6)$$

где скобки  $\langle \dots \rangle$  обозначает усреднение в бесконечных пределах.

Используя уравнение (3.5), получим:

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2\tau^2} \langle (x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k)^2 \rangle. \quad (3.7)$$

При увеличении  $\tau$  до определенной величины случайные флуктуации частоты усредняются, и дисперсия Аллана уменьшается; однако при дальнейшем увеличении  $\tau$  начинается систематическое увеличение шумов, приводящее к увеличению дисперсии Аллана.

На рис. 3.5 показана дисперсия Аллана (или нестабильность) наиболее распространенных стандартов частоты, а также шкал Всемирного (UT), атомного (TAI) и пульсарного (PSR) времени.

Нестабильность лучших цезиевых стандартов достигает  $10^{-14}$  при времени усреднения порядка нескольких суток. Водородные стандарты имеют лучшую из всех кратковременную нестабильность (до  $10^{-15}$ ) на интервале 100–1000 с. Именно поэтому они используются в радиоинтерферометрии со сверхдлинной базой.

Как показывают лабораторные исследования, энергетический спектр случайной функции  $y(t)$  (3.4), равный  $S_y(f)$ , где  $f$  — спектральные составляющие частоты  $\nu(t)$ , можно представить в виде:

$$S_y(f) = \sum_{\alpha=-2}^{\alpha=2} h_\alpha f^\alpha, \quad (3.8)$$

причем  $f$  лежит в конечной полосе частот:  $0 < f < f_h$ , верхняя частота  $f_h$  находится в пределах от нескольких сотен герц до нескольких сотен килогерц.

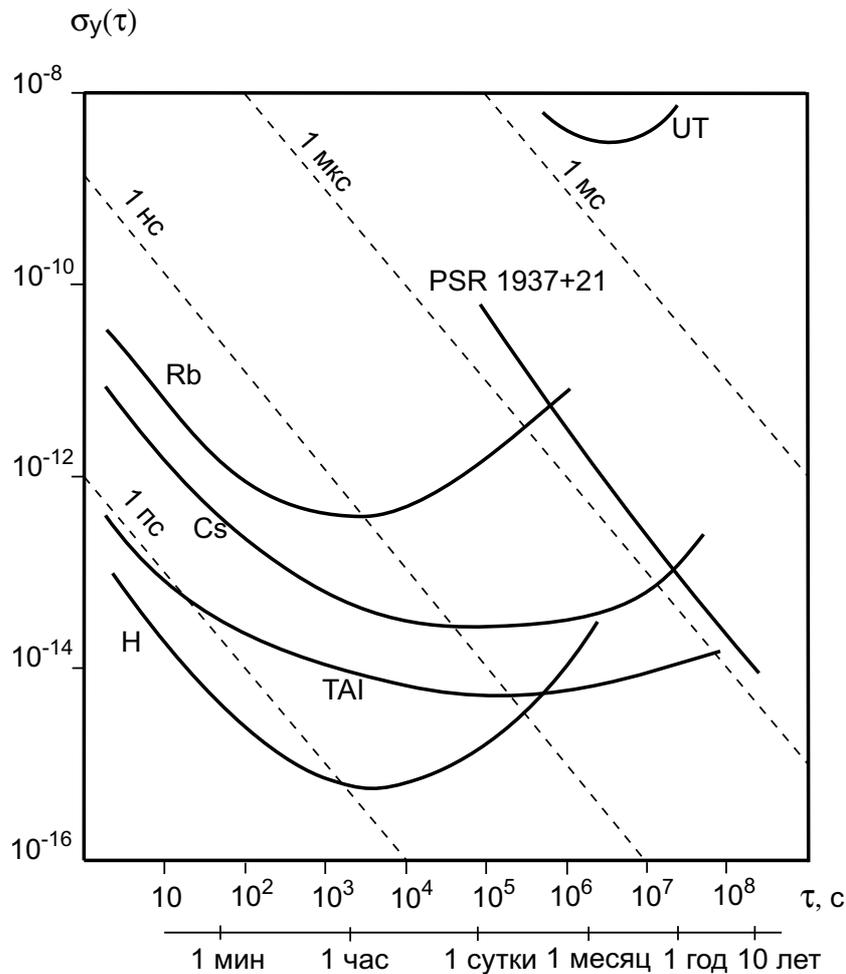


Рис. 3.5: Нестабильность стандартов частоты как функция времени.

Каждое слагаемое в (3.8) имеет название [27]. Шум со степенной зависимостью  $f^0$ , т. е. не зависящий от частоты, называется «белым шумом» и обусловлен, в частности, тепловым шумом генераторов, а также дробовым эффектом — случайным попаданием частиц (фотонов, атомов) в детектор. Шум  $f^{-1}$  называется «частотным фликкер-шумом», а  $f^{-2}$  называется «шумом случайных блужданий частоты». Они обусловлены случайными изменениями температуры, другими параметрами, приводящими к макроскопическим вариациям резонаторов стандартов частоты, что ограничивает их долговременную стабильность. Шум  $f^1$  называется «фазовым фликкер-шумом»;  $f^2$  называется «белым фазовым шумом». Их происхождение известно в меньшей степени.

На рис. 3.6 показано асимптотическое поведение спектра  $S_y(f)$  и дисперсии Аллана в зависимости от частоты и времени усреднения.

Идеальный стандарт будет генерировать постоянную во времени частоту. Однако, если величина частоты будет отличаться от номинальной

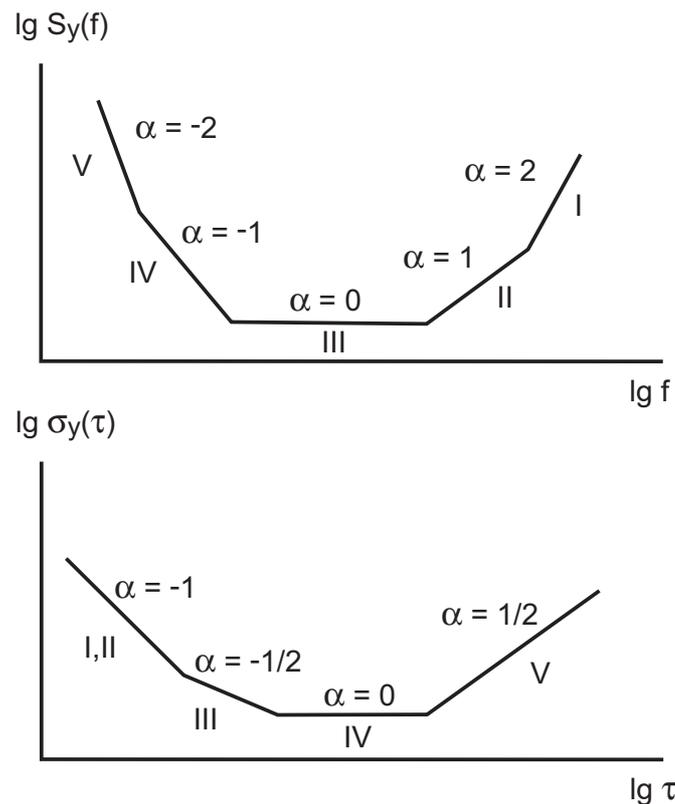


Рис. 3.6: Асимптотическое поведение функций  $\lg S_y(f)$  и  $\lg \sigma_y(\tau)$ . Римскими цифрами отмечены режимы: I — белый фазовый шум, II — фазовый фликкер-шум, III — белый частотный шум, IV — частотный фликкер-шум, V — шум случайных блужданий частоты.

(9192631770 Гц), то шкала этого стандарта будет равномерно расходиться с ТАИ. Отличие реальной частоты стандарта от номинальной называется его *точностью*. Точность секунды ТАИ равна примерно  $5 \cdot 10^{-14}$  (одна сигма). Это означает, что шкала ТАИ расходится с идеальной шкалой времени примерно на 1 мкс в год. Пунктирной линией на рис. 3.5 показано расхождение шкал времени на разных интервалах с идеальной равномерной шкалой.

Как сказано выше, нуль-пункты различных стандартов атомного времени могут не совпадать. Для того чтобы уменьшить время поиска интерференционных полос, а также величину начального сдвига сигналов часы на пунктах РСДБ синхронизируют.

Задача сравнения (синхронизации) часов сама по себе является сложной, и изложение теории и используемых методов выходит за рамки учебника. Скажем лишь несколько слов.

Для синхронизации часов используются два основных метода: первый основан на применении специальных радиосигналов, а второй — на перевозке часов.

До середины 80-х годов использовались специальные радиосигналы точного времени или навигационные системы типа LORAN-C. Сейчас для этой цели используются глобальные навигационные системы GPS и ГЛОНАСС. На спутниках GPS установлены высокостабильные стандарты частоты, на основе которых формируется собственная атомная шкала, которая называется TAI(GPS). Шкала GPS имеет постоянное смещение относительно TAI, равное 19 секундам, т. е.

$$\text{TAI} = \text{TAI(GPS)} + 19^{\text{s}}.$$

Для синхронизации и сличения частот наземных часов используются радиосигналы, излучаемые спутниками. Корректируя момент приема на время распространения сигнала, можно определить показание наземных часов в шкале GPS, т. е. синхронизовать их. Ошибка синхронизации часов по GPS/ГЛОНАСС составляет от 5 до 50 нс.

Из-за отличия генерируемых частот от номинальных шкалы стандартов, установленных на пунктах РСДБ, в процессе сеанса наблюдений расходятся. Поэтому при анализе наблюдений необходимо учитывать не только рассинхронизацию часов, но и их ход.

Требования на фазовую стабильность могут быть определены введением функции когерентности  $C(T)$  [186], которая описывает уменьшение амплитуды интерференции от времени накопления из-за влияние фазового шума.

$$C(T) = \left| \left\langle \frac{1}{T} \int_0^T e^{i\phi(t)} dt \right\rangle \right|, \quad (3.9)$$

где  $\phi(t)$  — случайная составляющая фазы интерференционного сигнала,  $T$  — произвольное время накопления. В фазе  $\phi(t)$  учитываются такие явления, как шум, связанный с атмосферными неоднородностями, и шум в стандартах частоты, которые вызывают изменения интерференционной фазы.

Среднеквадратичное значение  $C(T)$  является монотонно убывающей функцией времени, изменяющейся от 1 до 0. Время когерентности  $t_c$  определяется как значение  $T$ , при котором значение  $\langle C^2(T) \rangle$  уменьшается с 1 до 0,5. Величина  $\langle C^2(T) \rangle$  равна [30]:

$$\langle C^2(T) \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right) \exp\{-\pi^2 \nu_0^2 t^2 [\sigma_y^2(t) + \sigma_y^2(2t) + \dots]\} dt.$$

Приближенно время когерентности  $t_c$  можно оценить из соотношения:

$$2\pi\nu_0 t_c \sigma_y(\tau_c) \approx 1, \quad (3.10)$$

т. е. за время  $t_c$  среднеквадратичная ошибка фазы достигает значения 1 радиан.

В действительности фазовая стабильность интерферометра хуже, чем стабильность стандартов частоты. Во-первых, при распространении радиосигнала через атмосферу и ионосферу в фазу добавляется случайный шум. Если пункты РСДБ находятся на большом расстоянии друг от друга, то шумы независимы. Во-вторых, гетеродины имеют худшую стабильность, чем стандарты частоты. Частота гетеродина намного выше частоты опорного сигнала стандарта, поэтому вместо  $\nu_0$  в выражение (3.10) следует подставить частоту  $f_{LO}$ . Так при  $f_{LO} = 8$  ГГц и  $\sigma_y = 10^{-14}$  получим  $t_c \approx 2000$  с.

### 3.3 Системы регистрации

За 40 лет существования РСДБ аппаратура непрерывно совершенствовалась [36]. Рассмотрим здесь основные системы регистрации.

При записи данных (преобразованного высокочастотного радиосигнала) на магнитную ленту или диск обязательно должно быть отмечено время прихода сигнала на антенну. Наилучшим решением является одновременная запись временных меток вместе с данными. Это позволяет восстановить время прихода сигналов на антенны во время их корреляции. Перед корреляцией рассинхронизация часов на пунктах РСДБ должна быть определена как можно более точно. В настоящее время используются глобальные навигационные системы GPS и/или ГЛОНАСС. Ошибка рассинхронизации часов может достигать нескольких десятков наносекунд.

Целью корреляционной обработки записанных данных является получение интерференционной картины (английский термин «fringes»). Как следует из определения длины когерентности (см. § 2.3) это возможно лишь при определенных условиях. Ширина полос интерференционной картины связана, с одной стороны, с относительной задержкой двух записанных сигналов, с другой стороны, обратно пропорциональна полосе записи. Увеличение полосы записи необходимо для увеличения чувствительности интерферометра, что выражается в контрастности полос, от чего зависит точность определения задержки сигналов. В то же время это приводит к уменьшению длины когерентности. Это означает, что две записи должны быть синхронизованы по времени с ошибкой, меньшей нескольких десят-

ков наносекунд при том, что задержка может достигать нескольких миллисекунд.

Ошибки с синхронизацией часов, а также невозможность механического совмещения записей с наносекундной точностью приводят к тому, что корреляционная функция вычисляется для разных задержек, близких к расчетной задержке. Чем точнее известна последняя, тем меньше переборов потребуется коррелятору для нахождения максимума корреляционной функции. Эта операция называется слежением по задержке («delay tracking»).

Из-за вращения Земли задержка меняется (из-за изменения проекции базы на направление на радиисточник). Это приводит к тому, что интерференционная картина «бежит». Скорость движения интерференционных полос (частота интерференции) для РСДБ может достигать десятков килогерц. Для когерентного накопления сигнала в течение десятков секунд требуется остановить смещение полос. Эта процедура выполняется при корреляционной обработке и называется вращением лепестков или остановкой полос («fringe rotation, fringe stopping»). Как и в случае с задержкой, чем точнее вычислена частота интерференции, тем меньше потребуется переборов при процедуре остановкой полос.

### 3.3.1 Канадская аналоговая система регистрации

Магнитофон для радиоастрономических наблюдений должен иметь широкую полосу записи и высокую стабильность скорости движения ленты. Если полоса записи равна 1 МГц, то ширина кросскорреляционной функции составляет 1 мкс. Это означает, что ленты, выровненные перед чтением, не должны разойтись во время чтения более чем на 1 мкс.

Для решения этой задачи в канадской регистрирующей системе (National Research Council) использовались рубидиевые стандарты частоты, студийные телевизионные видеомагнитофоны Ampex [53]. Для синхронизации лент использовались специальные метки, которые генерировались стандартом частоты и записывались на ленту вместе с полезным сигналом. Синхронизирующие импульсы позволяли совместить ленты с ошибкой  $\pm 0,2$  мкс. Начальная установка лент выполнялась вручную, для этого использовалась информация, записанная на звуковой дорожке. Одной ленты хватало примерно на 90 минут записи. Вращение лепестков (учет частоты интерференции) выполнялось во время записи, для этого изменялась скорость протяжки ленты на одном из магнитофонов.

Впервые интерференционные лепестки на базе 3074 км были найдены весной 1967 г. при наблюдении источников 3С273 и 3С345 на частоте 448 МГц (67 см) [54, 55].

### 3.3.2 Цифровая система регистрации Mark-I

Первая цифровая регистрационная система, в которой использовались современные компьютерные магнитофоны, была разработана группой ученых из Национальной радиоастрономической обсерватории, Калифорнийского и Корнелльского университетов и получила название Mark-I.

Видеосигнал в полосе от 0 до 360 кГц преобразовывался в цифровой сигнал, причем использовалось однобитное квантование (т.е. сохранялся только знак сигнала). Для записи использовались стандартные полудюймовые IBM-совместимые компьютерные ленты. Данные записывались параллельно на 6 дорожек (на седьмую дорожку записывался контрольный бит четности) с плотностью 315 бит/см. Скорость записи равнялась 720 кбит/с. Запись начиналась по импульсу, генерируемому каждые 10 с часами, которые управлялись атомным стандартом частоты. Запись велась зонами длительностью 0, 2 с, в каждой содержалось 140400 бит; зоны разделялись пустыми промежутками. Это было сделано для синхронизации чтения лент. На ленту записывалось примерно  $1,4 \times 10^8$  бит информации (около 200 с). В программе наблюдений одна лента отводилась для записи одного радиоисточника.

Ленты с двух телескопов могли быть обработаны на любом компьютере. Одна из лент для компенсации задержки сдвигалась на определенной число бит, затем выполнялась операция однобитного умножения. Результат накапливался в течение 0, 4 мс (т.е. складывался результат перемножения 288 пар бит). Затем сумма умножалась на синусную функцию от частоты интерференции для соответствующей 0, 2-секундной зоны. Так как точное значение частоты интерференции заранее неизвестно, синус вычислялся для некоторого набора частот. Затем вычислялось Фурье-преобразование, и положение пика в спектре позволяло найти поправку к частоте интерференции.

Для обработки одной пары лент (200 с данных) требуется примерно 90 минут времени счета на компьютере IBM 360/50.

Первые наблюдения были проведены в мае 1967 г. [43].

Система регистрации Mark-I была успешно применена сначала на трансконтинентальной базе NRAO - Hat Creek, Калифорния (август 1967) [73], потом при РСДБ наблюдениях на межконтинентальных базах (январь–февраль 1968 г.) [127].

Примерно в это же время группа специалистов из MIT разработала похожую систему регистрации для наблюдения на РСДБ мазерных источников [163].

Первые геодезические наблюдения на РСДБ с использованием этой системы были проведены в 1969 г. [109].

### 3.3.3 Цифровая система регистрации Mark-II

В 1971 г. в НРАО была разработана система регистрации, получившая название Mark-II [75]. Для записи использовались видеоманитроны Ampex VR660C. Принимаемые сигналы оцифровывались и записывались в цифровом виде со скоростью 4 Мбит/с на ленту шириной два дюйма. Записывающие головки наклонены по отношению к ленте и вращались со скоростью 30 оборотов в секунду. Благодаря этому скорость ленты относительно головок равна 650 дюймов/с, тогда как скорость протяжки ленты всего 3,7 дюйма/с. Это позволило увеличить плотность записи до 6000 бит/дюйм.

Данные записываются кадрами длительностью 1/60 с. Каждый кадр начинается с синхрослова — набора бит, обозначающего начало кадра и его номер. Каждые 512 мкс (после 2006 бит данных) записывается специальная 8-битовая последовательность 11111110, которая используется для синхронизации протяжки лент при чтении. Кадр заканчивается специальным словом, обозначающим «конец кадра».

Для корреляции данных впервые был разработан специализированный компьютер. Коррелятор автоматически совмещал ленты, выполнял слежение по задержке, вращение лепестков. Специализированный компьютер позволял проделывать эти операции быстрее, чем компьютер IBM 360/50. Высокая скорость вычислений потребовалась поскольку наблюдения стали проводиться на более высоких частотах, более длинных базах. Для достижения большого времени накопления потребовались непрерывный и точный учет эффектов, связанных с вращением Земли. Усложнению и удорожанию коррелятора был противопоставлен принцип упрощения и удешевления и, в то же время, надежности устройств регистрации, так как процесс корреляции можно повторить, а наблюдения нет.

Система Mark-II стала очень надежной, после того как в конце 1970-х годов промышленные видеоманитроны были заменены на профессиональные студийные.

### 3.3.4 Цифровая система регистрации Mark-III

Система регистрации Mark-III [187] была разработана в середине 1970-х годов с помощью совместных усилий ученых обсерватории Хайстек и Годдардовского центра космических полетов.

Впервые сигналы, принимаемые в двух частотных полосах  $S$  ( $2, 2 \div 2, 3$ ) ГГц и  $X$  ( $8, 2 \div 8, 6$ ) ГГц, одновременно записывались на магнитную ленту. Это позволило учесть вклад ионосферы в задержку сигнала в  $X$ -диапазоне.

Для системы регистрации Mark-III использовались магнитофоны с 28 головками. В каждом канале 1-битовый сигнал записывался в полосе 2 МГц; общая полоса записи равнялась таким образом 56 МГц.

В системе использовались 14 независимых настраиваемых конвертеров. Поэтому система Mark-III была наиболее приспособлена для геодезических наблюдений, в которых использовалась технология синтеза полосы для увеличения эффективной полосы регистрации, что значительно увеличивало точность измерения задержки [185]. В результате ошибка определения задержки равнялась 50 пкс.

Коррелятор для обработки данных на однобазовом интерферометре был разработан в 1979 г. Скоро появилась модернизированная версия для одновременной корреляции трех баз. Аналогичный вариант коррелятора был установлен в Бонне в институте Макса Планка (MPIfR). Новая и более мощная модель, названная Mark-IIIА для одновременной обработки 6/12 баз была разработана в конце 1980-х годов; корреляторы этой модели были установлены в Хайстеке, USNO и MPIfR. В 2000 г. все они были заменены корреляторами Mark-IV.

За 20 лет работы системы Mark-III использовались разные магнитные ленты. В ранних системах запись велась на ленту шириной 1 дюйм, наматываемую на 14-дюймовую катушку. Ленты длиной 9000 футов могли содержать до 10 Гбайт данных при скорости записи 112 Мбит/с и времени записи 6,5 минут. Система Mark-III была очень дорогой. После модернизации (разработки новой системы записывающих/проигрывающих головок) удалось увеличить емкость лент в 12 раз (Mark-IIIА). С появлением нового типа – тонких металлизированных – лент удалось на ту же катушку вместить 17600 футов ленты. Емкость ленты увеличилась до 600 Гбайт, что позволило записывать на нее данные наблюдений в течение 24-часового сеанса.

### 3.3.5 Канадская система регистрации S2

Первое сообщение о канадской системе регистрации S2 на видеомангнитофонах со скоростью записи 12 Мб/с появилось в 1988 г. [230]. Позже система S2 была модернизирована, были использованы профессиональные магнитофоны со скоростью записи 16 Мб/с. Используя 8 магнитофонов для параллельной записи, можно было получить суммарную скорость 128 Мб/с. Коррелятор для системы S2 был разработан в 1999 г. [66] для обработки РСДБ наблюдений в рамках проекта VSOP [218], а также наблюдений по геодезической программе Канады.

### 3.3.6 Японская система регистрации

В Японии разработка системы регистрации началась в 1976 г. Система получила название К-1. В 80-е годы появились системы К-2, К-3, К-4. Система К-3, разработанная в 1983 г., была полностью совместима с Mark-III. В системе К-4 использовался коммерческий кассетный видеомангнитофон фирмы Sony. В первоначальной версии использовалось только однобитное квантование. В поздних версиях стало возможным использовать многобитное квантование. Система может быть сконфигурирована для различных вариантов записи, многие из которых совместимы с системами Mark-III и VLBA, со скоростями до 256 Мб/с. Система вместе с 10-стационарным FX-коррелятором использовалась для поддержки проекта VSOP.

Первые наблюдения с гигабитной системой записи были проведены в 1999 г. Данные оцифровываются с четырехбитным разрешением и записываются со скоростью 1024 Мб/с [135].

### 3.3.7 Система регистрации VLBA

Американская сеть VLBA состоит из десяти одинаковых телескопов диаметром 25 м. Коррелятор VLBA может обрабатывать данные с 20 телескопов с высоким спектральным разрешением до 1024 точек. VLBA система имеет 8 частотных каналов и может записывать сигналы либо с однобитным либо с двухбитным квантованием. Эти особенности отражают использование решетки VLBA для решения двух разных задач: для геодезии, как и в случае Mark-III, применяется синтезирование полосы, для астрофизики при спектроскопии источников используется двухбитное квантование, и нет нужды записывать данные к нескольким частотным каналам.

Система регистрации VLBA основана на рекордере Mark-IIIА, но с полностью замененной электроникой контроля и записи/чтения для улучше-

ния надежности. На скорости записи 128 Мб/с лента записывается 12 часов.

### 3.3.8 Система регистрации Mark-IV

Система регистрации Mark-IV — это модернизированная система Mark-III, совместимая с системой регистрации VLBA. Конверторы полос Mark-III были заменены, новые конверторы оборудованы фильтрами на полосы 8 и 16 МГц. Форматор также был заменен; в новой системе могут быть получены сигналы либо с однобитным либо с двухбитным квантованием. Рекордер также модернизирован для записи/чтения 32 дорожек, как в системе VLBA. В результате модернизации данные могут записываться со скоростью 512 и даже 1024 Мб/с.

Обработка данных возможна на четырех корреляторах, разработанных консорциумом из нескольких институтов США и Европы. Коррелятор имеет XF-архитектуру. Обработка возможна до 16 станций и до 16 частотных каналов на станцию.

### 3.3.9 Интерфейс записи

Сеть РСДБ как международный инструмент требует совместимости записывающих и читающих устройств. С развитием РСДБ во многих странах, как показано выше, появились собственные разработки регистрирующих систем, часто не совместимые с другими системами. Поэтому в 1999 г. появилась идея разработать стандартный интерфейс записи РСДБ данных (VLBI Standard Interface — VSI) [227].

Определение интерфейса означает:

- 1) определение параметров записывающих устройств (hardware) — IVS-H;
- 2) определение параметров программного обеспечения (software) — IVS-S;
- 3) определение параметров сигнала для передачи данных по сети — IVS-E.

### 3.3.10 Система регистрации Mark 5

В 2001 г. была продемонстрирована первая система регистрации с записью на диски. Система Mark 5 основана на сервере со специальной PCI I/O карте фирмы Conduant Corporation. Так называемая карта Streamstor позволяет проводить одновременную запись на несколько жестких дисков.

В системе Mark 5A с форматором Mark-IV скорость записи равна 1024 Мб/с.

Система Mark 5B была разработана в конце 2004 г. в соответствии со стандартом VSI.

Обе системы оборудованы двумя стойками, в каждой из которых 8 дисководов. Запись/чтение происходит на/или с одного пакета со скоростью 1024 Мб/с.

### 3.4 Преобразование сигнала в РСДБ

В приближении плоского волнового фронта напряжение на выходе двух антенн интерферометра с базой  $\mathbf{b}$  для одной спектральной компоненты частоты  $\omega = 2\pi f$  можно представить в комплексном виде:

$$\begin{aligned} V_1(t) &= A_1(\omega)e^{i\omega t}, \\ V_2(t) &= A_2(\omega)e^{i\omega(t-\tau)}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где  $\tau$  — задержка сигнала. Геометрическая задержка равна  $\tau_g = \frac{1}{c}\mathbf{b} \cdot \mathbf{s}$ , если наблюдается источник в направлении  $\mathbf{s}$ . Реальная задержка  $\tau$  отличается от геометрической  $\tau_g$ :

$$\tau = \tau_g + \Delta\tau_b + \Delta\tau + \Delta\tau_{atm}.$$

Поправка  $\Delta\tau_b$  необходима для учета смещения второго из телескопов за время прохождения волной расстояния от первого до второго телескопа;  $\Delta\tau_{atm}$  — поправка, учитывающая задержку сигнала в атмосфере,  $\Delta\tau$  — поправка, учитывающая вклад ошибок априорных параметров, используемых для вычисления геометрической задержки  $\tau_g$ .

Сигналы гетеродинов представим в виде  $B_1 \cos [2\pi f_{LO}t + \theta_1(t)]$  и  $B_2 \cos [2\pi f_{LO}t + \theta_2(t)]$ , т.е. считаем что фазы гетеродинов содержат аддитивные шумовые компоненты  $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$ .

Рассмотрим сначала отклик интерферометра для верхней полосы частот (рис. 3.4), когда частота гетеродина ниже частоты ВЧ сигнала ( $f_{LO} < f$ ):

$$\begin{aligned} X^{(1)}(t) &= A_1(\omega)G_1(\omega)e^{i\phi_1^{(1)}(t)}, \\ Y^{(1)}(t) &= A_2(\omega)G_2(\omega)e^{i\phi_2^{(1)}(t)}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где

$$\begin{aligned} \phi_1^{(1)}(t) &= (\omega - \omega_{LO})t - \theta_1(t) - \psi_1(\omega), \\ \phi_2^{(1)}(t) &= (\omega - \omega_{LO})t - \omega\tau - \theta_2(t) - \psi_2(\omega), \end{aligned} \quad (3.13)$$

где  $G_1(\omega), G_2(\omega)$  — амплитудные и  $\psi_1(\omega), \psi_2(\omega)$  — фазовые характеристики фильтров низких частот,  $\omega_{LO} = 2\pi f_{LO}$ .

Затем сигналы записываются на ленту вместе с метками времени, причем часы на станциях имеют смещение относительно шкалы UTC на величину  $\tau_{c1}$  и  $\tau_{c2}$ , так что записываемые сигналы имеют вид:

$$\begin{aligned} X^{(2)}(t) &= A_1(\omega)G_1(\omega)e^{i\phi_1^{(2)}(t)}, \\ Y^{(2)}(t) &= A_2(\omega)G_2(\omega)e^{i\phi_2^{(2)}(t)}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где

$$\begin{aligned} \phi_1^{(2)}(t) &= (\omega - \omega_{LO})(t - \tau_{c1}) - \theta_1(t) - \psi_1(\omega), \\ \phi_2^{(2)}(t) &= (\omega - \omega_{LO})(t - \tau_{c2}) - \omega\tau - \theta_2(t) - \psi_2(\omega). \end{aligned} \quad (3.15)$$

При проигрывании записей  $X$  и  $Y$  один из потоков данных  $Y$  сдвигается на время  $\tilde{\tau} = \tau_g + \Delta\tau_b + \Delta\tau'_{atm}$ ,  $\Delta\tau'_{atm}$  — задержка в атмосфере, вычисленная на основе принятой модели распространения радиоволн в атмосфере, причем величина  $\Delta\tau'_{atm}$  не равна истинной задержке  $\Delta\tau_{atm}$ . Величина  $\tilde{\tau}$  называется компенсирующей задержкой. Она вычисляется на основе априорных координат антенн, источников, принятых теорий прецессии нутации и т.д. (см. главу 4).

В результате учета компенсирующей задержки получим

$$Y^{(3)}(t) = A_2(\omega)G_2(\omega)e^{i\phi_2^{(3)}(t)}, \quad (3.16)$$

фаза сигнала становится равной

$$\phi_2^{(3)}(t) = (\omega - \omega_{LO})(t - \tau_{c2} + \tilde{\tau}) - \omega\tau - \theta_2(t) - \psi_2(\omega). \quad (3.17)$$

Спектральная кросскорреляционная функция на выходе аналогового коррелятора равна

$$s_{12} = \langle X^{(2)}(t)Y^{*(3)}(t) \rangle \quad (3.18)$$

или

$$s_{12}(\omega, \omega_{LO}) = A_1(\omega)A_2^*(\omega)G_1(\omega)G_2^*(\omega)e^{i\Phi} = S(\omega, \omega_{LO})e^{i\Phi}, \quad (3.19)$$

где

$$\Phi = \phi_1^{(2)}(t) - \phi_2^{(3)}(t) = (\omega - \omega_{LO})(\tau_{c2} - \tau_{c1}) + \omega(\tau - \tilde{\tau}) + \omega_{LO}\tau + \Delta\theta(t) + \Delta\psi(\omega),$$

где  $\Delta\theta(t) = \theta_2(t) - \theta_1(t)$ ,  $\Delta\psi(\omega) = \psi_2(\omega) - \psi_1(\omega)$ . Пусть  $\Delta\tau_c = \tau_{c2} - \tau_{c1}$  — рас-синхронизация часов,  $\Delta\tau_g = \tau - \tilde{\tau}$  — ошибка, возникающая из-за ошибок априорных параметров. Тогда

$$\Phi = (\omega - \omega_{LO})(\Delta\tau_c + \Delta\tau_g) + \omega_{LO}\tau + \Delta\theta(t) + \Delta\psi(\omega). \quad (3.20)$$

Уравнение (3.19) получено для преобразования верхней полосы пропускания в смесителе, когда промежуточная частота  $f - f_{LO}$  положительна. Для нижней полосы, когда  $f_{IF} = f_{LO} - f$ , фаза равна

$$\Phi = (\omega_{LO} - \omega)(\Delta\tau_c + \Delta\tau_g) - \omega_{LO}\tau - \Delta\theta(t) - \Delta\psi(\omega). \quad (3.21)$$

В идеальном случае, когда  $\tau_{c2} = \tau_{c1}$ ,  $\theta_1 = \theta_2$ ,  $\tau = \tilde{\tau}$ , уравнения (3.20) и (3.21) сводятся к  $\Phi = \omega_{LO}\tau$  для верхней полосы и  $\Phi = -\omega_{LO}\tau$  для нижней полосы. Считаем также, что частотные характеристики фильтров одинаковы и не вносят никаких смещений фазы ( $\Delta\psi(\omega) = 0$ ).

Тогда энергетический спектр гармоник для верхней полосы частот равен

$$s_{12}(\omega, \omega_{LO}) = S(\omega, \omega_{LO})e^{i[(\omega - \omega_{LO})(\Delta\tau_c + \Delta\tau_g) + \omega_{LO}\tau + \Delta\theta(t)]}$$

Функция  $s_{12}$  — действительная, но нечетная, поэтому кросскорреляционный энергетический спектр сигнала непрерывного излучения обладает свойством

$$s_{12}(\omega) = s_{12}^*(-\omega).$$

Кросскорреляционная и спектральная функции связаны соотношением:

$$\rho_{12}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_{12}(\omega')e^{i\omega'\tau} d\omega'.$$

Для обеих полос интегрирование выполняется как по положительным, так и по отрицательным частотам, так как  $s_{12}$  действительная функция, то

$$\rho_{12}(\tau) = 2F_1(\tau^*) \cos(\omega_{LO}\tau + \Delta\theta(t)) - 2F_2(\tau^*) \sin(\omega_{LO}\tau + \Delta\theta(t)),$$

где  $\tau^* = \tau + \Delta\tau_c + \Delta\tau_g$ ,

$$F_1(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega') \cos(\omega'\tau) d\omega', \quad (3.22)$$

$$F_2(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega') \sin(\omega'\tau) d\omega'. \quad (3.23)$$

Если  $S(f)$  — низкочастотный спектр прямоугольной формы с шириной полосы  $\Delta f$ , то

$$F_1(\tau) = \Delta f \frac{\sin(2\pi\Delta f\tau)}{2\pi\Delta f\tau}, \quad F_2(\tau) = \Delta f \frac{\sin^2(\pi\Delta f\tau)}{\pi\Delta f\tau}$$

Тогда в комплексном виде корреляционная функция равна:

$$\rho_{12}(\tau) = 2\Delta f \exp [i(\omega_{LO}\tau + \Delta\theta(t) + \pi\Delta f\tau^*)] \frac{\sin(\pi\Delta f\tau^*)}{\pi\Delta f\tau^*}.$$

Изменение  $\tau$  со временем из-за вращения Земли приводит к тому, что интерференционные полосы на выходе коррелятора «бегут».

В РСДБ частота интерференции достаточно велика, и сигнал может быть потерян после усреднения корреляционных данных. Поэтому интерференционные лепестки на выходе коррелятора останавливаются вращением фазы. Так как координаты источников, телескопов и другие параметры известны с недостаточной точностью, поэтому лепестки останавливаются путем перебора различных частот интерференции.

Для этого используется смещение фазы сигналов. Преобразование кросс-корреляционной функции можно описать как домножение на экспоненциальный член

$$e^{-i\omega_{LO}\tilde{\tau}}$$

в верхней полосе частот.

В результате получим выражение для комплексной корреляционной функции

$$\rho_{12}(\tau) = \Delta f \exp \{i[\omega_{LO}\Delta\tau_g + \Delta\theta(t) + \pi\Delta f\tau^*]\} \frac{\sin(\pi\Delta f\tau^*)}{\pi\Delta f\tau^*}.$$

Слагаемое  $\omega_{LO}\tau$ , которым представлена основная частота интерференции, удалено, но остаточная частота интерференции может присутствовать из-за ошибок в вычислении задержки и рассинхронизации часов.

### 3.5 Фаза, групповая задержка и частота интерференции

Отклик двухэлементного интерферометра может быть записан в виде (2.31):

$$s_{12} = Ae^{i\Phi}, \quad (3.24)$$

где  $A$  — амплитуда интерференционных полос,  $\Phi$  — фаза интерференции или фазовая задержка сигнала между двумя антеннами. Для РСДБ величина фазовой задержки может достигать десятков тысяч радиан. Амплитуда и фаза зависят от времени, они содержат информацию о строении источника и его положении. Поэтому измерения этих величин позволяют построить изображения радиоисточников, а также определить как абсолютные координаты фазового центра источника, так и относительные координаты отдельных компонент относительно этого центра.

Основной вклад в фазовую задержку  $\Phi$  вносит геометрическая составляющая  $\Phi_g$ :

$$\Phi_g = 2\pi f \left( \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{s}}{c} \right) \equiv 2\pi f \tau_g,$$

где  $\mathbf{b}$  — вектор базы между фазовыми центрами антенн,  $\mathbf{s}$  — единичный вектор в направлении на источник.

Полную фазовую задержку можно представить в виде суммы трех членов [96]:

$$\Phi = 2\pi f(\tau_g + \tau_n) + \Phi_d + \Phi_V. \quad (3.25)$$

В первое слагаемое помимо геометрической задержки  $\tau_g$  включен дополнительный член  $\tau_n$ , с помощью которого учитывается вклад недисперсионных эффектов. Фаза, таким образом, линейно зависит от частоты и аддитивных к  $\tau_g$  слагаемых. В частности, к ним можно отнести задержку сигнала в тропосфере Земли и поправку из-за рассинхронизации часов. Фазовый член  $\Phi_d$  появляется, во-первых, из-за нелинейной зависимости задержки от частоты (задержка в ионосфере) и, во-вторых, из-за задержек сигнала в приемной аппаратуре, не зависящих от частоты, которые можно назвать дисперсионными составляющими фазы. Наконец, последний член  $\Phi_V$  определяется функцией видности источника.

Таким образом, геометрическая часть полной фазы определяет положение источника на небесной сфере, фазовый член  $\Phi_V$  связан со структурой источника, дисперсионная и недисперсионная части несут информацию о среде, в которой распространяется сигнал.

Традиционным подходом является оценка полной фазы на основе априорных данных. Используя известные данные о координатах, среде распространения можно вычислить приближенное (модельное) значение фазы  $\Phi_m$ . Тогда

$$\Phi = \Phi_m + \Phi_r,$$

где  $\Phi_r$  — остаточная фаза.

Самую большую часть  $\Phi_m$  составляет геометрическая составляющая  $\Phi_g$ . Априорное значение  $\Phi_g^0$  равно:

$$\begin{aligned}\Phi_g^0 &= 2\pi f_0 \left( \frac{\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{s}_0}{c} \right) = \\ &= \frac{2\pi f_0}{c} (b_1^0 \cos \delta_0 \cos H_0 - b_2^0 \cos \delta_0 \sin H_0 + b_3^0 \sin \delta_0),\end{aligned}\quad (3.26)$$

$$\mathbf{b}_0 = \begin{pmatrix} b_1^0 \\ b_2^0 \\ b_3^0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}_0 = \begin{pmatrix} \cos \delta_0 \cos H_0 \\ -\cos \delta_0 \sin H_0 \\ \sin \delta_0 \end{pmatrix},$$

$f_0$  — априорная средняя частота наблюдений (см. 2.8).

Остальные дополнительные поправки к  $\Phi_g^0$  связаны со средой, аппаратурой, свойствами источника и т.д. и, естественно, влияют на интерференционную картину.

Допустим, что  $\Phi_r = \Phi_g - \Phi_g^0$ , т.е. неизвестными в модели являются только координаты антенн и источника. Тогда ограничиваясь вкладом в  $\Phi_r$  только линейных поправок к координатам источника  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\delta$  и проекциям базы  $\Delta b_1$ ,  $\Delta b_2$ ,  $\Delta b_3$  получим линеаризованное уравнение:

$$\Phi_r = \frac{2\pi f_0}{c} (A \cos H_0 + B \sin H_0 + C) + \Delta\Phi(f, t, \mathbf{s}), \quad (3.27)$$

функции  $A$ ,  $B$ ,  $C$  равны

$$\begin{aligned}A &= \Delta b_1 \cos \delta_0 + b_2^0 \Delta\alpha \cos \delta_0 - b_1^0 \Delta\delta \sin \delta_0, \\ B &= -\Delta b_2 \cos \delta_0 + b_1^0 \Delta\alpha \cos \delta_0 + b_2^0 \Delta\delta \sin \delta_0, \\ C &= \Delta b_3 \sin \delta_0 + b_3^0 \Delta\delta \cos \delta_0 + \tau_c + \text{квадратичные члены.}\end{aligned}\quad (3.28)$$

К функции  $C$  добавлен член  $\tau_c$  — рассинхронизация часов. Член  $\Delta\Phi(f, t, \mathbf{s})$  включает все негеометрические поправки к фазе, зависящие от времени, частоты и параметров источника.

Уравнение (3.27) является основой решения астрометрических и геодезических задач. Используя измерения фазы, можно уточнить априорные параметры, в частности, координаты источника  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\delta$ , проекции базы интерферометра  $\Delta b_1$ ,  $\Delta b_2$ ,  $\Delta b_3$ .

Для двухэлементного интерферометра, на котором наблюдается  $N$  источников, число неизвестных равно  $3 + 2N$ , а именно 3 проекции базы,  $2N - 1$  координат источников (из-за произвольности выбора начала прямых восхождений на поправки  $\Delta\alpha$  должно быть наложено дополнительное условие) плюс постоянное смещение фазы. Каждое уравнение (3.27)

содержит три неизвестных функции, и три наблюдения одного источника позволяют найти эти функции. Значит, для решения системы уравнений (3.27) и определения неизвестных необходимо наблюдать минимум 3 источника.

Самая сложная проблема при вычислении полной фазы как суммы геометрической и остаточной фаз связана с неоднозначностью. Так как выходной сигнал коррелятора (3.24) представляет собой синусоиду, то отличить один период синусоиды от другого невозможно, т.е. остаточная фаза может быть измерена только в интервале от  $-\pi$  до  $\pi$ . Обозначим фазу интерференционных полос как  $\Phi_f$ . С учетом сказанного имеем

$$\Phi_f = \Phi_r \pmod{2\pi}.$$

Значит

$$\Phi = \Phi_m + \Phi_f + 2\pi n,$$

где  $n$  — произвольное целое число. Если  $n = 0$ , то можно сказать, что интерферометрические наблюдения когерентны, если  $|n| \gg 0$ , то некогерентны. Первое условие выполняется, в частности, при дифференциальных наблюдениях близких источников: опорного и исследуемого. В этом случае разностная фаза может быть измерена до долей градуса, что обеспечивает самую высокую точность позиционных измерений в астрометрии.

Помимо фазы в астрометрии используют еще две величины: частоту интерференции и групповую (в отличие от фазовой) задержку, которые свободны от проблемы неоднозначности фазы.

Частота интерференции — это изменение фазы со временем:

$$f_f = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (3.29)$$

Для вычисления частоты интерференции  $f_f$  используются значения фазы  $\Phi$ , которые находятся интегрированием произведения  $X(t)Y^*(t)$  (3.18) на коротких интервалах (порядка 0,1 с). Как правило, нескольких отсчетов фазы бывает достаточно для корректного вычисления частоты интерференции  $f_f$ . Измерения  $f_f$  свободны от проблемы неоднозначности.

Запишем основное уравнение для частоты интерференции, используя (3.27):

$$\Delta f_f = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Phi_r}{\partial t} = \frac{f_0}{c} \frac{dH_0}{dt} (-A \sin H_0 + B \cos H_0 + C), \quad (3.30)$$

здесь функции  $A, B, C$  равны

$$\begin{aligned} A &= \Delta b_1 \cos \delta_0 + b_2^0 \Delta \alpha \cos \delta_0 - b_1^0 \Delta \delta \sin \delta_0, \\ B &= -\Delta b_2 \cos \delta_0 + b_1^0 \Delta \alpha \cos \delta_0 + b_2^0 \Delta \delta \sin \delta_0, \\ C &= \frac{d\tau_c}{dt} + \frac{d\Delta\Phi(f, t, \mathbf{s})}{dt} + \text{квадратичные члены.} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Величина  $dH_0/dt$  равна угловой скорости вращения Земли  $\Omega = 7,27 \times 10^{-5}$  рад/с.

Количество неизвестных в уравнении (3.30) по-прежнему равно  $3 + 2N$ . Однако функция  $C$  при использовании частоты интерференции содержит только инструментальные поправки и не содержит поправки к координатам источника и проекциям базы. Две функции  $A$  и  $B$  зависят только от экваториальных проекций базы и координат источника. Значит в полном объеме задача определения всех неизвестных по измерениям только частоты интерференции решена быть не может. Кроме этого, следует обратить внимание на значительное ухудшение точности определения склонений источников вблизи экватора, поскольку  $\Delta\delta \sim 1/\sin \delta_0$ .

Аналогично частоте интерференции определяется групповая задержка. Если источник наблюдается в нескольких разнесенных полосах частот, то можно измерить изменение фазы  $\Phi$  с частотой. Производная фазы по частоте называется групповой задержкой:

$$\tau_{gr} \equiv \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial f} \quad (3.32)$$

или из (3.25):

$$\tau_{gr} = \tau_g + \tau_n + \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\partial \Phi_d}{\partial f} + \frac{\partial \Phi_V}{\partial f} \right). \quad (3.33)$$

Таким образом, групповая задержка включает геометрическую задержку, недисперсионный член (это рассинхронизация часов и тропосферная задержка) и два слагаемых, зависящих от частоты (представляют вклад ионосферы, структуры источника, а также приемной системы в фазовую задержку).

Групповая задержка заранее не известна. Однако можно найти поправку к априорной (расчетной) величине задержки и написать условные уравнения типа (3.27). Легко видеть, что функции  $A, B, C$  одинаковы как для фазовой, так и для групповой задержки.

Иными словами, информация, которую несут фазовая и групповая задержки, одинакова. Основная разница между ними — это ошибка определения фазовой и групповой задержек из наблюдений. Соответственно от этого зависят и ошибки определения неизвестных параметров.

Из-за того, что измерения  $\tau_{gr}$  свободны от проблемы неоднозначности, в РСДБ групповая задержка — основной источник информации.

Рассмотрим теперь, от чего зависят ошибки определения фазовой и групповой задержек, а также частоты интерференции [164, 210]. Этот анализ позволяет грамотно проектировать приемные и регистрирующие системы РСДБ.

Для оценки среднеквадратичной ошибки фазы интерференции  $\sigma_\phi$  поступим следующим образом.

Пусть амплитуда интерференции выражается вектором  $\mathbf{A}$  с нулевой фазой, т. е.  $A_x = A = |\mathbf{A}|$ ,  $A_y = 0$ , где  $A = (T_{a_1}T_{a_2})^{1/2}$  для точечного источника. Здесь  $T_{a_1}, T_{a_2}$  — антенные температуры. Если  $T_{a_1} = T_{a_2} = T_a$ , то  $A = T_a$ .

Шум представляется вектором  $\mathbf{n}$ , компоненты которого  $n_x, n_y$  являются некоррелированными случайными величинами, распределенными по нормальному закону с нулевым средним и дисперсией, равной [185]:

$$\sigma_x^2 = \frac{T_{sys}^2 + T_{a_1}T_{a_2}}{2\Delta ft},$$

$$\sigma_y^2 = \frac{T_{sys}^2 - T_{a_1}T_{a_2}}{2\Delta ft},$$

где  $\Delta f$  — полоса регистрации,  $t$  — время накопления,  $T_{sys}^2 = (T_{A_1} + T_{R_1})(T_{A_2} + T_{R_2})$ ,  $T_{R_1}, T_{R_2}$  — шумовые температуры. Наблюдаемая величина  $\mathbf{Z} = \mathbf{A} + \mathbf{n}$  представляет сумму функции видности (в отсутствии шума) и шума (рис. 3.7).

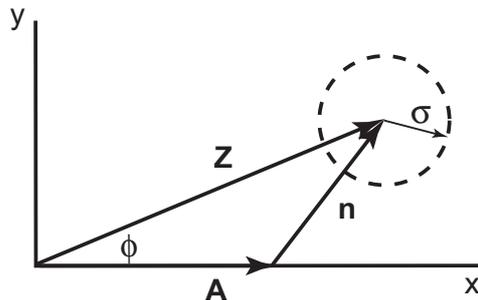


Рис. 3.7: Комплексная функции видности  $\mathbf{Z}$  при наличии шума с дисперсией  $\sigma$ .

Здесь  $\mathbf{Z}$  и  $\mathbf{n}$  — векторы, компоненты которых представляют действительную и мнимую части соответствующих величин. Шум в обеих компонентах  $\mathbf{Z}$  имеет среднеквадратичное значение  $\sigma$ . Если для измерения функ-

ции видности действительные и мнимые отклики коррелятора объединяются, то полная погрешность измерения равна:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) = \frac{T_{sys}^2}{2\Delta ft}. \quad (3.34)$$

Распределение вероятности амплитуды  $|\mathbf{Z}| = \sqrt{Z_x^2 + Z_y^2}$  равно:

$$p(Z) = \frac{Z}{\sigma} \exp\left(-\frac{Z^2 + A^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{ZA}{\sigma^2}\right),$$

где  $I_0$  — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

В случае сильного сигнала,  $A \gg \sigma$  вероятностные распределения  $Z$  и  $\phi$  близки к нормальному распределению:

$$p(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sqrt{\frac{Z}{A}} \exp\left[-\frac{(Z-A)^2}{2\sigma^2}\right],$$

$$p(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{A}{\sigma} \exp\left[-\frac{A^2\phi^2}{2\sigma^2}\right].$$

Отсюда получим

$$\langle Z \rangle = A \left[1 + \frac{\phi^2}{2A^2}\right], \quad \sigma_Z \approx \sigma \left(1 - \frac{\phi^2}{8A^2}\right) \approx \sigma$$

$$\langle \phi \rangle = 0, \quad \sigma_\phi = \frac{\sigma}{A}.$$

Заметим, что отношение  $A/\sigma$  представляет собой отношение сигнал/шум (signal-to-noise ratio, SNR).

Видно, что  $\langle Z \rangle$  представляет собой смещенную оценку  $A$ . При единственном измерении  $Z$  максимальное значение аппроксимируется как  $Z_{max} = (A^2 + \sigma^2)^{1/2}$  с точностью приближения для всех значений  $A$  лучше 8% [30]. Следовательно, при одном измерении  $Z$  наиболее вероятное значение  $A$  примерно равно  $\sqrt{Z^2 - \sigma^2}$ . Если усредняется  $N$  сигналов  $Z$ , то отношение сигнал/шум улучшается как  $\sqrt{N}$ .

Подставляя (3.34) в выражение для  $\sigma_\phi$ , находим, что среднеквадратичное отклонение фазы  $\sigma_\phi$  для точечного источника равно:

$$\sigma_\phi = \frac{1}{SNR} = \frac{T_{sys}}{T_a \sqrt{2\Delta ft}}. \quad (3.35)$$

Например, при  $T_{sys} = 100^\circ\text{K}$ ,  $T_a = 1^\circ\text{K}$ ,  $\Delta f = 50$  МГц,  $t = 10$  с получим  $\sigma_\phi \approx 3 \cdot 10^{-3}$  рад или  $0,2^\circ$ .

Как говорилось выше, частоту интерференции можно вычислить по измерениям фазы, проведенным в разные моменты времени, в соответствии с определением

$$f_f = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Необходимо провести через точки прямую линию, наклон которой будет пропорционален частоте интерференции. Это — классическая задача регрессии. Тогда, если выполнено  $N$  измерений в моменты  $t_i$  с шагом  $\Delta t$  в интервале от  $-N\Delta t/2$  до  $+N\Delta t/2$ , дисперсия наклона линии равна

$$\sigma_f^2 = \frac{\sigma_\phi^2}{(2\pi)^2 \sum t_i^2},$$

причем ошибка фазы равна

$$\sigma_\phi = \frac{T_{sys}}{T_A \sqrt{2\Delta f \Delta t}}.$$

Так как

$$\sum t_i^2 \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{-T/2}^{+T/2} t^2 dt = \frac{1}{\Delta t} \frac{\tau^3}{12},$$

где  $T = N\Delta t$ . Значит

$$\sigma_f^2 = \frac{12\sigma_\phi^2}{(2\pi)^2 N T^2}.$$

Подставляя выражение для  $\sigma_\phi$  получим

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{12}{2\pi^2} \frac{T_{sys}}{T_A} \frac{1}{\sqrt{2\Delta f T^3}}}. \quad (3.36)$$

Групповая задержка пропорциональна изменению фазы от частоты. Поэтому задержку можно оценить по наклону прямой линии, проведенной через значения фазы как функции частоты. Предположим, что сделано  $N$  измерений фазы на частотах  $f_i$  и каждое измерение имеет ширину полосы  $\Delta f/N$  с ошибкой  $\sigma_\phi$ . Дисперсия наклона линии равна

$$\sigma_\tau^2 = \frac{\sigma_\phi^2}{(2\pi)^2 \sum f_i^2}.$$

Аналогично анализу, проведенному для частоты интерференции, получим

$$\sigma_\tau^2 = \frac{12\sigma_\phi^2}{(2\pi)^2 N \Delta f^2}.$$

Следовательно, ошибка измерения задержки равна

$$\sigma_{\tau} = \sqrt{\frac{12}{2\pi^2} \frac{T_{sys}}{T_A} \frac{1}{\sqrt{2\Delta f^3 t}}}. \quad (3.37)$$

Выводы из формул (3.36) и (3.37) очевидны: для уменьшения ошибки частоты интерференции выгоднее всего увеличивать время интегрирования, тогда как для уменьшения ошибки групповой задержки следует увеличивать полосу регистрации  $\Delta f$ .

К сожалению, значительно увеличить время интегрирования невозможно из-за случайных вариаций фазы стандартов частоты и, следовательно, гетеродинов. Как выше говорилось, оно ограничено временем когерентного накопления.

Для уменьшения ошибки вычисления задержки предложен метод синтеза полосы [185].

При записи в полосе 2 МГц ошибка измерения задержки  $\sigma_{\tau}$  составляет единицы наносекунд, что явно недостаточно для решения астрометрических задач. Более высокую точность измерения задержки можно получить, если переключать частоту гетеродина и последовательно записывать  $N$  частотных каналов. Другой вариант — разделение сигнала на  $N$  узких полос, расположенных в широком интервале частот  $\Delta F$ , и одновременная запись сигнала в этих полосах на регистрирующем устройстве (рис. 3.2). Более широко используется второй метод, так как при последовательном переключении фаза может измениться, и в результате ошибка определения задержки увеличивается.

В регистрирующих системах используется одновременная запись в небольшом числе полос (около 10). Основной проблемой является оптимальное расположение полос по частотам. Желательно так расположить полосы, чтобы фазу можно было экстраполировать без неопределенности  $2\pi$  от одной полосы к следующей. Тогда в формулу (3.37) входит величина синтезированной полосы  $\Delta F$ , которая может достигать десятков и даже сотен мегагерц. При использовании метода синтеза частоты удается измерить задержку с ошибкой  $\sigma_{\tau}$  около 10 пкс.

Детальное изложение метода синтеза частоты можно найти в работе [210].

Таким образом, измеряемыми являются четыре величины: амплитуда интерференционных полос (или коррелированная плотность потока), фаза интерференции или фазовая задержка (с учетом шума, вносимыми гетеродинами, атмосферой), скорость изменения фазы со временем (частота интерференции) и скорость изменения фазы с частотой (групповая задержка).

Используя рис. 2.8, получим выражения для геометрической задержки:

$$\tau_g^0 = \frac{b}{c} [\sin \delta_b \sin \delta_s + \cos \delta_b \cos \delta_s \cos(H_s - h)],$$

индекс  $s$  использован для априорных координат источника  $\alpha_s, \delta_s$ . Если  $\alpha, \delta$  — истинные координаты, то разница между истинной  $\tau_g$  и априорной  $\tau_g^0$  геометрическими задержками равна

$$\Delta\tau = \tau_g - \tau_g^0 \approx \frac{\partial \tau_g^0}{\partial \alpha \cos \delta_s} (\alpha - \alpha_s) \cos \delta_s + \frac{\partial \tau_g^0}{\partial \delta} (\delta - \delta_s) + \dots$$

Введем обозначения  $\theta_\alpha = (\alpha - \alpha_s) \cos \delta_s$ ,  $\theta_\delta = \delta - \delta_s$ , т. е.  $\Delta\theta = \sqrt{\theta_\alpha^2 + \theta_\delta^2}$  есть угловое расстояние между истинным и априорным положениями источника.

Поправки к фазе, задержке и частоте интерференции равны

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= K_\Phi [(\cos \delta_b \sin L)\theta_\alpha + (\sin \delta_b \cos \delta_s - \cos \delta_b \sin \delta_s \cos L)\theta_\delta], \\ \Delta\tau &= K_\tau [(\cos \delta_b \sin L)\theta_\alpha + (\sin \delta_b \cos \delta_s - \cos \delta_b \sin \delta_s \cos L)\theta_\delta], \\ \Delta f_f &= K_{\dot{\Phi}} [\cos L\theta_\alpha + \sin \delta_s \sin L\theta_\delta], \end{aligned}$$

где

$$K_\Phi = \frac{\omega b}{c}, \quad K_\tau = \frac{b}{c}, \quad K_{\dot{\Phi}} = \frac{\omega b}{c} \Omega \cos \delta_b, \quad L = H_s - h.$$

Таким образом чувствительность фазы, задержки и частоты интерференции к угловому расстоянию  $\Delta\theta$  есть

$$\begin{aligned} \Delta\theta(\Phi) &= \frac{\sigma_\phi}{K_\Phi} \sim \frac{\sigma_\phi \lambda}{2\pi b} \\ \Delta\theta(\tau) &= \frac{\sigma_\phi}{K_\tau} \sim \sqrt{12} \frac{\sigma_\phi f \lambda}{2\pi \Delta f b} \\ \Delta\theta(f_f) &= \frac{\sigma_\phi}{K_{\dot{\Phi}}} \sim \sqrt{12} \frac{\sigma_\phi 2\pi/\Omega}{2\pi 2\pi\tau_c} \frac{\lambda}{b \cos \delta_b} \end{aligned}$$

$$\lambda = 2\pi c/\omega, \quad f = \omega/2\pi.$$

Задержка и частота интерференции намного менее чувствительны с угловому расстоянию  $\Delta\theta$  (на факторы  $\Delta f/f$  и  $\tau_c \Omega \cos \delta_b$ ). Например, при  $b = 6000$  км,  $\lambda = 3$  см, и при использованных выше параметрах:  $T_{sys} = 100$  °К,  $T_a = 1$  °К,  $\Delta f = 50$  МГц,  $t = 10$  с получим  $\Delta\theta(\Phi) \approx 0,5 \cdot 10^{-6}$ , тогда как  $\Delta\theta(\tau) \approx 3 \cdot 10^{-4}$ .

## 3.6 Обработка цифровых сигналов

Использование цифровой схемотехники в РСДБ привело к значительному прогрессу. В первую очередь это касается точности компенсации задержки сигналов и простоты корреляционной обработки.

Преобразование аналогового сигнала в цифровую форму означает периодическую выборку значений напряжения сигнала с последующим квантованием, т.е. представлением каждого значения напряжения определенным числом бит. В РСДБ чаще всего используется одноуровневое (однобитное) или двухуровневое (двухбитное) квантование. В результате преобразования «аналог-цифра» поток цифровых данных не становится чрезмерно большим. Квантование приводит к потере чувствительности, поскольку вносится «шум квантования», однако многочисленные преимущества работы с цифровыми сигналами перевешивают этот недостаток.

### 3.6.1 Корреляция цифровых сигналов

Выше говорилось, что радиосигналы, принятые на каждой антенне, сначала конвертируются к сигналам в полосах от 0 до  $\Delta f$ , а затем оцифровываются.

Если полоса частот сигнала ограничена (считаем, что спектр мощности отличен от нуля в пределах полосы  $0 \div \Delta f$ ), то в процессе выборки не происходит потери информации, если частота выборки достаточно высока. Критическая частота выборки, равная  $2\Delta f$ , называется частотой Найквиста. Это означает, что спектр сигнала полностью определяется отсчетами с частотой  $2\Delta f$  или выше; во временной области – отсчетами с временными интервалами, не большими  $1/(2\Delta f)$ .

Низкочастотный сигнал дискретизируется с шагом  $\Delta t = 1/(2\Delta f)$ , называемым интервалом выборки:

$$\begin{aligned} X(n) &= X^{(2)}[(t = n\Delta t)], \\ Y(n) &= Y^{(2)}[(t = n\Delta t)], \end{aligned} \quad (3.38)$$

затем выполняется клиппирование (усиление с большим коэффициентом); в результате получается меандр с размахом от 0 до 1 (рис. 3.8) и цифровой сигнал, который и записывается на магнитные носители.

В цифровых системах, таким образом, сигналы  $X^{(2)}(t)$ ,  $Y^{(2)}(t)$  (3.14) сначала усиливаются, ограничиваются по некоторому уровню, затем из них делаются выборки (последовательности импульсов)  $X(n)$ ,  $Y(n)$  с периодом  $1/(2\Delta f)$ . Информация об амплитудах сигнала  $A_1$  и  $A_2$  теряется, а о фазах (3.15) сохраняется.

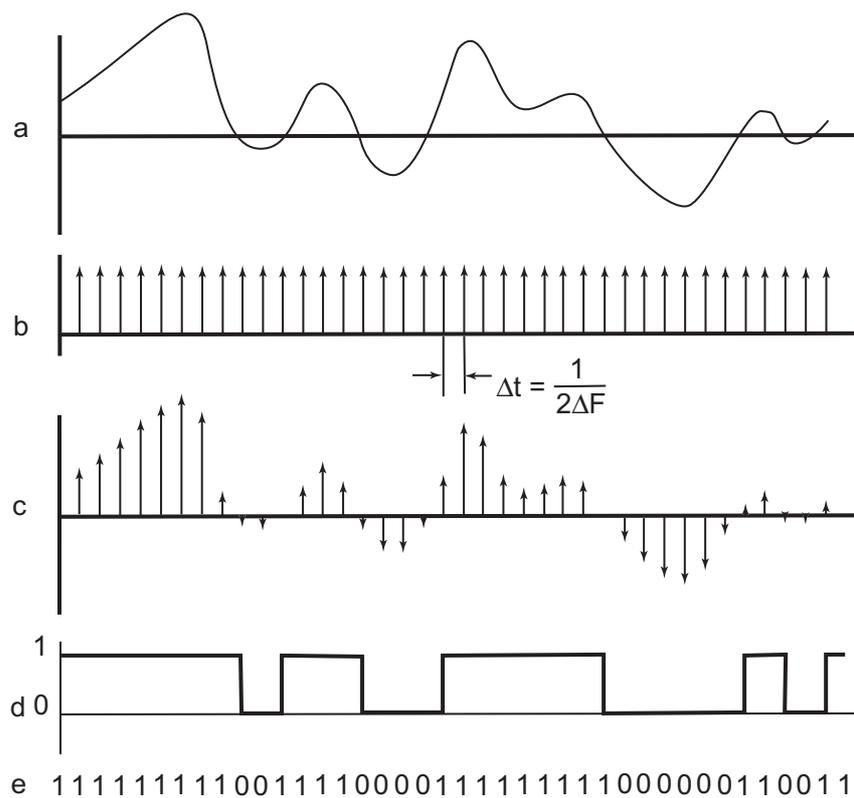


Рис. 3.8: Принцип однобитного квантования: а) аналоговый сигнал; б) тактовые импульсы с частотой  $2\Delta F$ ; в) выборка аналогового сигнала; д) меандр; е) цифровой сигнал.

В РСДБ сигналы  $X(n)$ ,  $Y(n)$  воспроизводятся либо с магнитных лент, либо с дисков, записанных во время сеанса наблюдений на каждом из пунктов РСДБ.

Связь автокорреляционной функции случайного аналогового процесса с нормальным распределением амплитуды и автокорреляционной функции соответствующего клипированного сигнала определяется соотношением ван Флека [217]. Его можно расширить и использовать для вычисления кросскорреляционной двух сигналов, поскольку шумы приемников можно считать нормальными случайными процессами.

Если напряжения на выходе приемников равны  $V_1(t)$  и  $V_2(t)$ , то кросскорреляционная функция по определению равна

$$s_{12}(\tau) = \langle V_1(t)V_2(t + \tau) \rangle.$$

Цифровые сигналы представляются в виде

$$X_i = \begin{cases} 1 & V_i > 0, \\ -1 & V_i < 0, \end{cases}$$

где  $i = 1, 2$  и их кросскорреляционная функция равна

$$\rho_{12} = \langle X_1(t)X_2(t + \tau) \rangle.$$

Соотношение ван Флека связывает функции  $s_{12}$  и  $\rho_{12}$ :

$$s_{12}(\tau) = \sqrt{(T_{a_1} + T_{R_1})(T_{a_2} + T_{R_2})} \sin\left[\frac{\pi}{2}\rho_{12}\right]$$

Таким образом кросскорреляционная функция  $s_{12}$  реальных сигналов может быть вычислена по  $\rho_{12}$ . Так как обычно  $\rho_{12} \ll 1$ , то

$$s_{12}(\tau) \approx \frac{\pi}{2}\rho_{12}.$$

Рассмотрим теперь схемы корреляторов.

### 3.6.2 Простой коррелятор

Цифровой сигнал вида (рис. 3.8, е) записывается на магнитные ленты или диски, которые перевозятся и затем обрабатываются на корреляторе.

На рис. 3.9 показана схема простого коррелятора [225]. Сигнал  $X(n)$  подается на последовательный сдвиговой регистр<sup>1</sup>. На рис. 3.9,а показан 8-битовый регистр.

Сигнал  $Y(n)$  сначала задерживается на три периода (на величину  $\tau = 3\Delta t, n = 3$ , затем подается параллельно на умножители. Для однобитной последовательности умножителем является логический элемент: «исключающее ИЛИ», преобразующий сигналы в соответствии с правилом  $Z = X \oplus Y$ , т.е.  $Z = 0$ , если  $X = 1, Y = 0$  или  $X = 0, Y = 1$ , и  $Z = 1$ , если  $X = 0, Y = 0$  или  $X = 1, Y = 1$ . Выходной сигнал для каждой задержки суммируется. Сумматором является счетчик, значения которого увеличиваются на 1, когда на выходе элемента «исключающее ИЛИ» появляется 1.

Если сигналы  $X(n)$  и  $Y(n)$  одинаковы, то при  $\tau = 0$  коэффициент корреляции равен 1.

Кросскорреляционная функция двух функций  $X(t)$  и  $Y(t)$  по определению (2.29) равна

$$s_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)Y^*(t - \tau)dt.$$

<sup>1</sup>Регистр — последовательное логическое устройство, используемое для хранения  $n$ -разрядных двоичных чисел и выполнения преобразований над ними. Регистр представляет собой упорядоченную последовательность триггеров, число которых соответствует числу разрядов в слове. В последовательном регистре запись и считывание информации происходит в первый триггер, а та информация, которая была в этом триггере, перезаписывается в следующий - то же самое происходит и с остальными триггерами

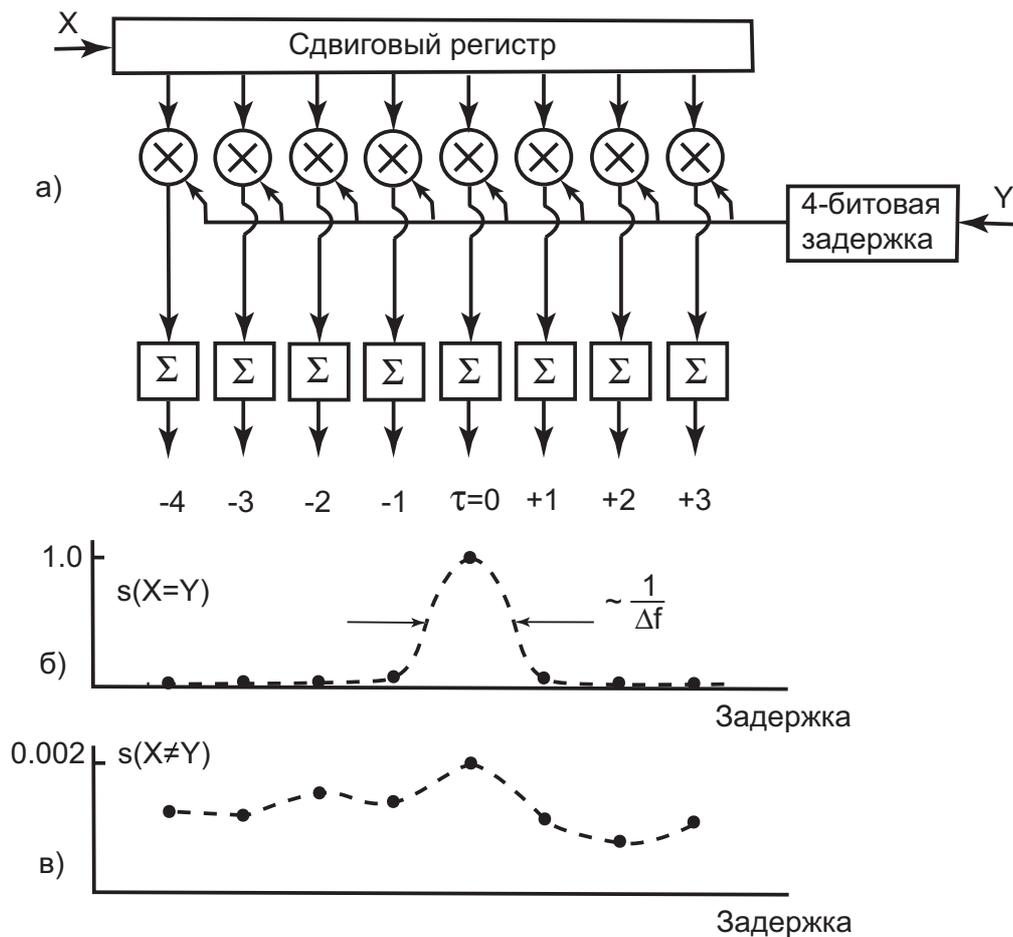


Рис. 3.9: Схема простого коррелятора.

В случае, если  $X(t) = Y(t)$ , функция  $s$  называется автокорреляционной функцией (рис. 3.9,б). Для цифровых сигналов интеграл заменяется суммой.

Если сигналы  $X$  и  $Y$  являются белым шумом, то большая часть энергии в корреляционном сигнале концентрируется вблизи задержек  $\tau \approx 0$ . Ширина корреляционной функции равна примерно  $1/\Delta f$ , как показано на рис. 3.9,б. Если сигналы  $X$  и  $Y$  слабо коррелированы, что имеет место при реальных наблюдениях на РСДБ, то коэффициент корреляции даже при  $\tau = 0$  может быть очень маленьким (рис. 3.9,в). Это означает, что мощность сигнала радиисточника значительно меньше мощности шумов системы.

### 3.6.3 Коррелятор с задержкой

Если задержка между сигналами  $X$  и  $Y$  будет более, чем  $8\Delta t$ , то с помощью коррелятора, изображенного на рис. 3.9,а, корреляцию найти не удастся.

Если бы сигнал  $Y$  имел постоянную задержку  $\tau$  относительно сигнала  $X$ , то решением проблемы было бы добавление линии задержки сигнала  $X$  перед сдвиговым регистром (рис. 3.10). Подобрав величину задержки  $\tilde{\tau}$  сигнала  $X$ , можно компенсировать относительно большой сдвиг сигнал  $Y$ . Однако из-за того, что сдвиговый регистр смещает последовательность

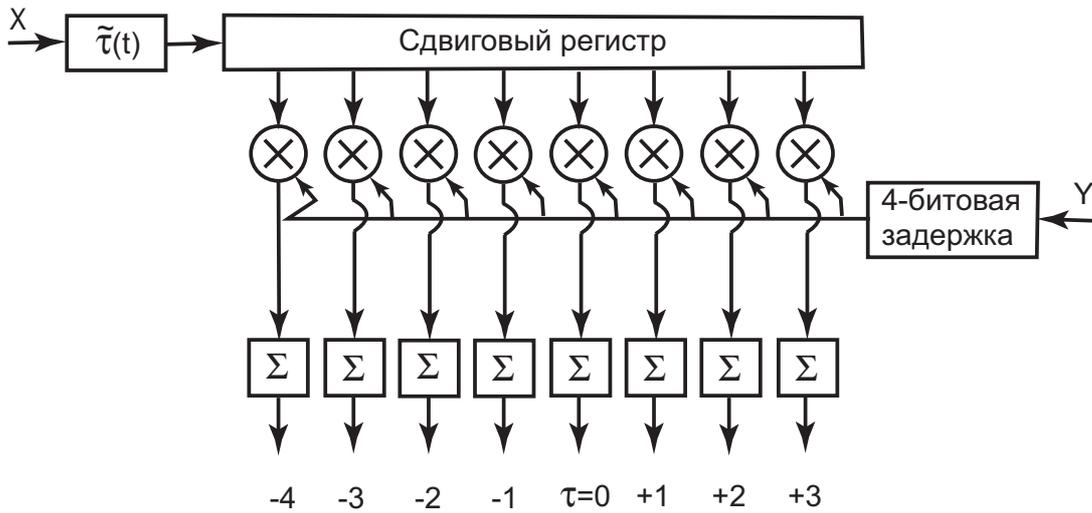


Рис. 3.10: Схема коррелятора с задержкой.

импульсов (сигнал  $X$ ) строго на величину интервала выборки  $\Delta t$ , то компенсирующая задержка  $\tilde{\tau}$  не может быть строго равной  $\tau$ , но может быть установлена в пределах  $\tilde{\tau} \pm \Delta t/2$  (рис. 3.11).

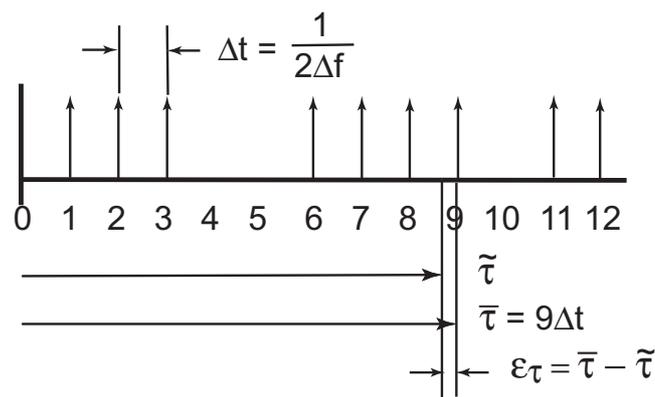


Рис. 3.11: Компенсирующая и дискретная задержки.

Компенсирующая задержка вычисляется на основе принятой модели [115]. Ошибка в величине компенсирующей задержки приводит кроме небольшого ухудшения отношения сигнал/шум еще к тому, что максимум корреляционной функции смещается относительно нулевого сдвига сигналов.

В результате того, что компенсирующая задержка  $\tilde{\tau}$  не равна задержке в корреляторе  $\bar{\tau} = n\Delta t$  фаза (3.17) сигнала  $Y^{(3)}(t)$  (3.16) равняется

$$\phi_2^{(3)}(t) = (\omega - \omega_{LO})(t - \tau_{c2} + \bar{\tau}) - \omega\tau - \theta_2(t) - \psi_2(\omega). \quad (3.39)$$

Значит, фаза корреляционной функции равна

$$\Phi = (\omega - \omega_{LO})(\Delta\tau_c + \overline{\Delta\tau_g}) + \omega_{LO}\tau + \Delta\theta(t) + \Delta\psi(\omega), \quad (3.40)$$

где  $\overline{\Delta\tau_g} = \tau - \bar{\tau}$ .

Таким образом, если задержка сигнала  $Y$  относительно сигнала  $X$  меняется со временем, то закон изменения задержки в корреляторе  $\bar{\tau}$  имеет вид ломаной линии (рис. 3.12). Для исправления этой ситуации исполь-

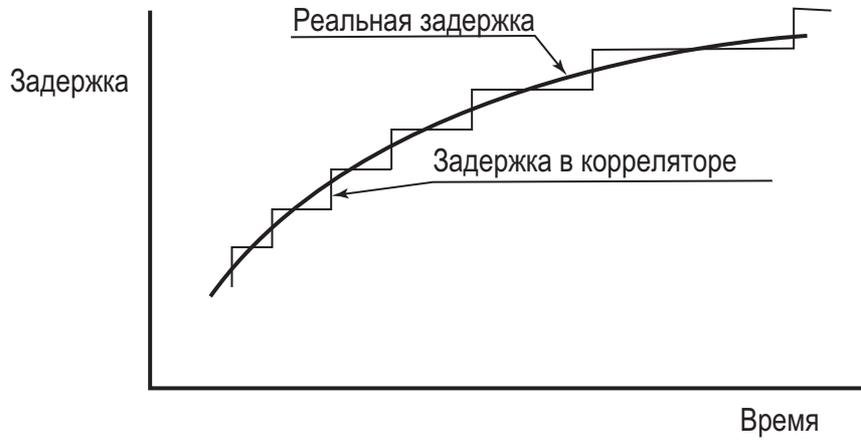


Рис. 3.12: Дискретное изменение задержки (слежение по задержке).

зуется коррекция за частичное смещение бит (fractional-bit-shift). Математически эта операция эквивалентна умножению сигнала на  $\exp[-i(\omega - \omega_{LO})\overline{\Delta\tau_g}]$ , и дает возможность исправить дискретное слежение по задержке [188]. Если этого не делать, то фаза будет иметь вид пилообразной функции, что приведет к уменьшению амплитуды интерференции (примерно на 0,6) к верхнему краю полосы частот.

После коррекции фаза равна

$$\Phi = (\omega - \omega_{LO})\Delta\tau_c + \omega_{LO}\tau + \Delta\theta(t) + \Delta\psi(\omega), \quad (3.41)$$

Для остановки полос необходимо умножить сигнал на  $\exp[-i\omega_{LO}\tilde{\tau}]$ . Эта операция уменьшает скорость изменения фазы почти до нуля. В результате получим основные уравнения, дающие отклик РСДБ на точечный источник (3.19):

$$s_{12}(\omega, t) = A_1(\omega)A_2^*(\omega)G_1(\omega)G_2^*(\omega)e^{i\Phi} = S(\omega, \omega_{LO})e^{i\Phi}, \quad (3.42)$$

$$\Phi = (\omega - \omega_{LO})\Delta\tau_c + \omega_{LO}\Delta\tau_g + \Delta\theta(t) + \Delta\psi(\omega). \quad (3.43)$$

Если источник разрешен, то  $A_1(\omega)A_2^*(\omega)$  заменяются на комплексную амплитуду интерференции.

В действительности  $s_{12}(\omega, t)$  зависит от времени, так как фазовый шум не равен нулю, и, поэтому, невозможно остановить лепестки полностью. Поэтому удобно ввести и изучать функцию  $s_{12}(\omega, \omega_f)$  — спектр по частотам интерференции:

$$s_{12}(\omega, \omega_f) = \frac{1}{T} \int_0^T s_{12}(\omega, t) e^{i\omega_f t} dt.$$

В отсутствии фазового шума  $\Delta\theta(t)$  по спектральным значениям  $s_{12}(\omega, \omega_f)$  для каждой частоты  $\omega_f$  можно определить остаточную частоту интерференции  $\omega_{LO}\Delta\tau_g$  и амплитуду  $A(\omega)$ . При наличии шумов частота интерференции, соответствующая максимальному значению  $s_{12}(\omega, \omega_f)$ , сдвигается и амплитуда интерференции уменьшается. Фазовый шум приводит к распределению энергии интерференции по некоторому диапазону частот интерференции. Поэтому  $A(\omega)$  можно оценить из спектра с помощью теоремы Парсеваля:

$$A^2(\omega) = \int_{-\omega_0}^{\omega_0} |s_{12}(\omega, \omega_f)|^2 d\omega_f.$$

Диапазон частот интерференции, в которой проводится интегрирование, должен быть достаточно широким, чтобы пропустить всю энергию интерференции, т.е.  $\omega_0 > 2\pi/t_c$ ,  $t_c$  — время когерентного накопления.

В отличие от аналогового коррелятора слежение по задержке выполняется в цифровом корреляторе шагами. Разница между априорной задержкой и задержкой в корреляторе не должна превышать величины интервала выборки  $\Delta t$  за время интегрирования, которое обычно составляет от нескольких долей секунды до нескольких секунд.

Эти требования накладывают вполне определенные условия на точность априорных значений частоты интерференции. Задержку можно представить в виде

$$\tau = \tilde{\tau} + (\dot{\tilde{\tau}} + \Delta\dot{\tilde{\tau}})t + \frac{1}{2}(\ddot{\tilde{\tau}} + \Delta\ddot{\tilde{\tau}})t^2 + \dots$$

Вклад поправок  $\Delta\dot{\tilde{\tau}}$ ,  $\Delta\ddot{\tilde{\tau}}$  при интегрировании за время  $T$  не должен превышать величины интервала выборки  $\Delta t$ :

$$\Delta\dot{\tilde{\tau}}T + \frac{1}{2}\Delta\ddot{\tilde{\tau}}T^2 < \Delta t.$$

Используя рис. 2.8, получим выражения для геометрической задержки:

$$\tau_g^0 = \frac{b}{c} [\sin \delta_b \sin \delta_s + \cos \delta_b \cos \delta_s \cos(H_s - h)].$$

Дифференцируя по времени, получим частоту интерференции:

$$\dot{\tau}_g^0 = -\frac{b}{c} \Omega \cos \delta_b \cos \delta_s \sin(H_s - h)].$$

Вторая производная равна

$$\ddot{\tau}_g^0 = -\frac{b}{c} \Omega^2 \cos \delta_b \cos \delta_s \cos(H_s - h)].$$

При длине базы, равной радиусу Земли, задержка равна примерно 21 мс. Максимальная частота интерференции будет примерно 1,5 мкс/с. Это означает, что задержка меняется за секунду на 1,5 мкс. При записи в полосе 2 МГц (частота опроса 4 МГц) интервал выборки  $\Delta t$  равен 0,25 мкс, т. е. в шесть раз меньше. Это значит, что задержка должна вычисляться чаще, чем шесть раз в секунду.

Величина второй производной составляет примерно 110 пкс/с<sup>2</sup>. Предполагая, что время интегрирования равно 10 с, получим, что вклад второй производной задержки будет около 10 нс. В используемых сейчас регистрирующих системах этой величиной можно пренебречь. Однако в планируемой системе VLBI2010 запись будет осуществляться в широких полосах (1 ГГц), период опроса будет равняться 0,5 нс. Поэтому изменением задержки из-за ненулевой второй производной пренебрегать будет нельзя.

### 3.6.4 XF-коррелятор по схеме «база интерферометра»

В большинстве современных РСДБ полосы принимаемых высокочастотных сигналов одинаковы (см. (3.12) и (3.13)). Пусть станция, на которой принимается сигнал  $X$ , находится ближе к источнику и движется из-за вращения Земли по направлению к нему. Более удаленная от источника станция, принимающая сигнал  $Y$ , движется от него. В результате доплеровского смещения частоты сигналы  $Y$  будут приниматься на более низкой частоте, чем сигналы  $X$ . При преобразовании (3.12) и (3.13) получим, что видеополосы двух сигналов будут сдвинуты друг относительно друга на доплеровское смещение частоты. Без коррекции видеополосы одного из сигналов корреляция не будет получена. Операция коррекции называется вращением или остановкой интерференционных лепестков (fringe rotation, fringe stopping).

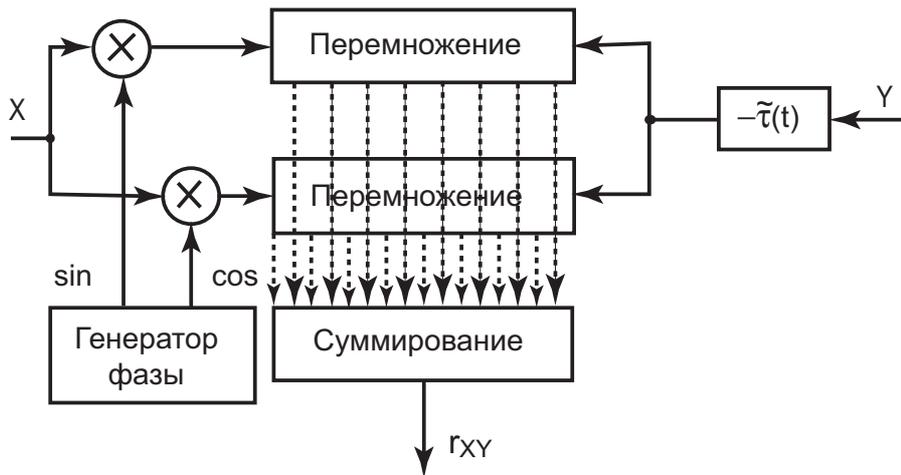


Рис. 3.13: Схема XF-коррелятора, построенного по принципу «база интерферометра».

Рассмотрим схему коррелятора, показанную на рис. 3.13.

В отличие от схемы коррелятора с задержкой (рис. 3.12) компенсирующая задержка  $\tilde{\tau}$  добавляется с обратным знаком к сигналу  $Y$ . Сигнал  $X$  умножается на синусную и косинусную функции, фазы которых определяются доплеровской частотой. Результирующие сигналы коррелируются с «задержанным» сигналом  $Y$ . Эта процедура называется квадратурным смешиванием и эффективна для смещения частоты спектра сигнала  $X$ . Для каждого значения задержки вычисляется «синусная» и «косинусная» суммы; такой коррелятор называется комплексным, поскольку пара этих чисел представляет собой комплексное число. Это комплексное число представляет собой кросс-корреляционную функцию  $s_{XY}(\tilde{\tau})$  для некоторого значения задержки. По принципу выполнения математических операций говорят, что коррелятор имеет «XF» тип: «X» обозначает кросс-корреляцию и «F» — преобразование Фурье кросс-корреляционной функции. Возможен обратный порядок действий: сначала «F» — преобразование Фурье сигналов  $X$  и  $Y$ , потом перемножение («X»). Такой коррелятор обозначается, как «FX».

Заметим, что синусная и косинусная функции, которые вырабатывает генератор фазы, являются чистыми синусной и косинусной волнами, а аппроксимируются цифровыми функциями (рис. 3.14).

Каждая синусная/косинусная волна заменяется цифровой функцией, принимающей значения  $-1, 0, +1$ . В случае, если  $\sin / \cos$  функция равна  $+1$ , то бит сигнала  $X$  подается на коррелятор без изменений. Если  $\sin / \cos$  функция равна  $-1$ , то бит сигнала  $X$  заменяется на противоположный, наконец, если величина  $\sin / \cos$  функции равна  $0$ , то на выходе умножите-

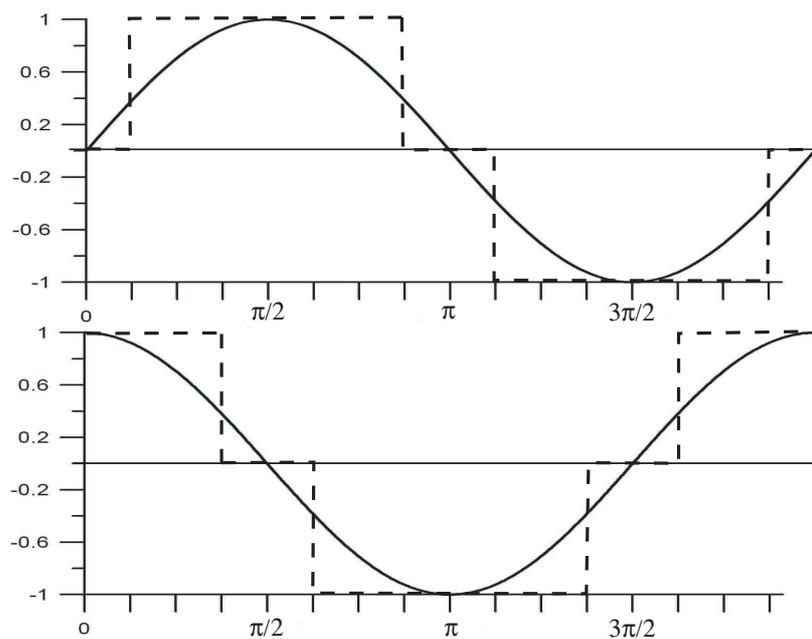


Рис. 3.14: Цифровые функции, аппроксимирующие тригонометрические функции.

ля устанавливает нуль и коррелятор не выполняет суммирования, независимо от величины бита сигнала  $Y$ . Хотя приближение синусной и косинусной волн цифровыми функциями вида (рис. 3.14) кажется грубым, схема работает хорошо; потери в отношении сигнал/шум составляют всего  $\sim 15\%$ .

Частота генератора фазы обычно выбирается равной центральной частоте полосы.

Число переборов по задержке при вычислении кросс-корреляционной функции зависит от точности компенсирующей задержки  $\tilde{\tau}$ , т.е. от точности параметров, от которых зависит  $\tilde{\tau}$ . Для геодезических РСДБ прием ведется в широкой полосе и, если модель вычисления  $\tilde{\tau}$  достаточно точна, то, как правило, число переборов невелико.

### 3.6.5 XF-коррелятор по схеме «станция интерферометра»

Из рис. 3.13 XF-коррелятора, построенного по принципу «база интерферометра» видно, что задержка должна рассчитываться и вводиться для каждой базы. Если число антенн в интерферометре равно  $K$ , то число баз равно  $K(K-1)/2$ . При большом  $K$  схема XF-коррелятора (рис. 3.13) становится очень сложной и дорогой.

Альтернативный подход реализован в многостанционном XF-корреляторе, схема которого показана на рис. 3.15.

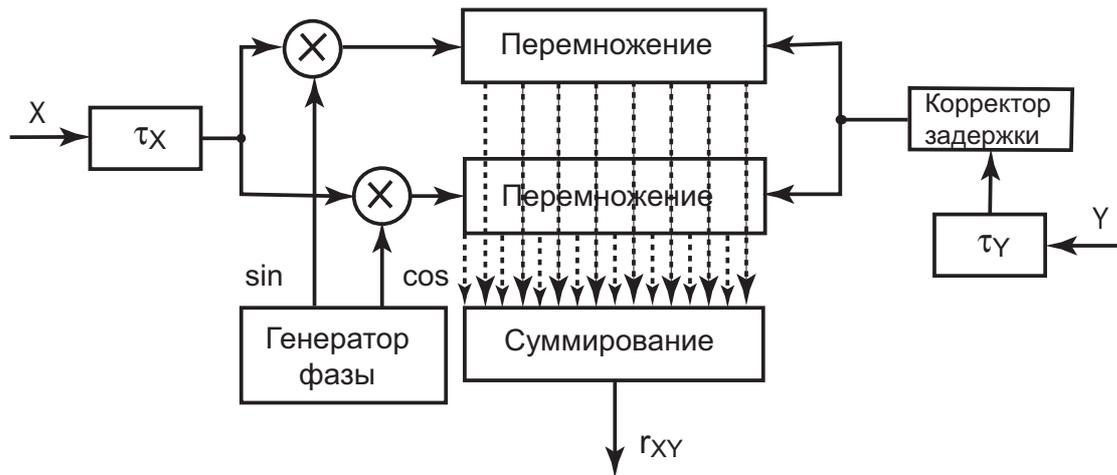


Рис. 3.15: Схема XF-коррелятора, построенного по принципу «станция интерферометра».

В этом корреляторе сигналы  $X$  и  $Y$  задерживаются каждый на определенную величину относительно некоторой общей точки, обычно это центр Земли. Но поскольку задержка для каждой станции выполняется дискретными шагами в интервале от  $-0,5$  до  $0,5$  периода выборки, то ошибки задержки для базы лежат уже в интервале от  $-1$  до  $+1$  периода. Поэтому перед корреляцией задержка базы должна быть исправлена. С деталями этой операции можно ознакомиться в статье [225].

Отметим основную разницу между схемами корреляторов, построенных по принципу «база интерферометра» и «станция интерферометра». В первом случае все измеряемые величины (фаза, задержка и частота интерференции) относятся к опорной точке первого телескопа, что естественно. Во втором случае они относятся к центру масс Земли. Разница между подходами существует и будет обсуждаться в главе 4.

Коррелятор Mark-IV построен по архитектуре «станция интерферометра». Корреляторы Mark-III и Mark-IIIА, которые могли обрабатывать наблюдения с малого числа станций, были построены по архитектуре «база интерферометра».

### 3.6.6 FX-коррелятор по схеме «станция интерферометра»

Схема FX-коррелятора показана на рис. 3.16.

С математической точки зрения оба коррелятора «XF» (сначала выполняется перемножение, потом преобразование Фурье) и «FX» (сначала выполняется преобразование Фурье, потом перемножение) эквивалентны. Однако с технической точки зрения они различны.

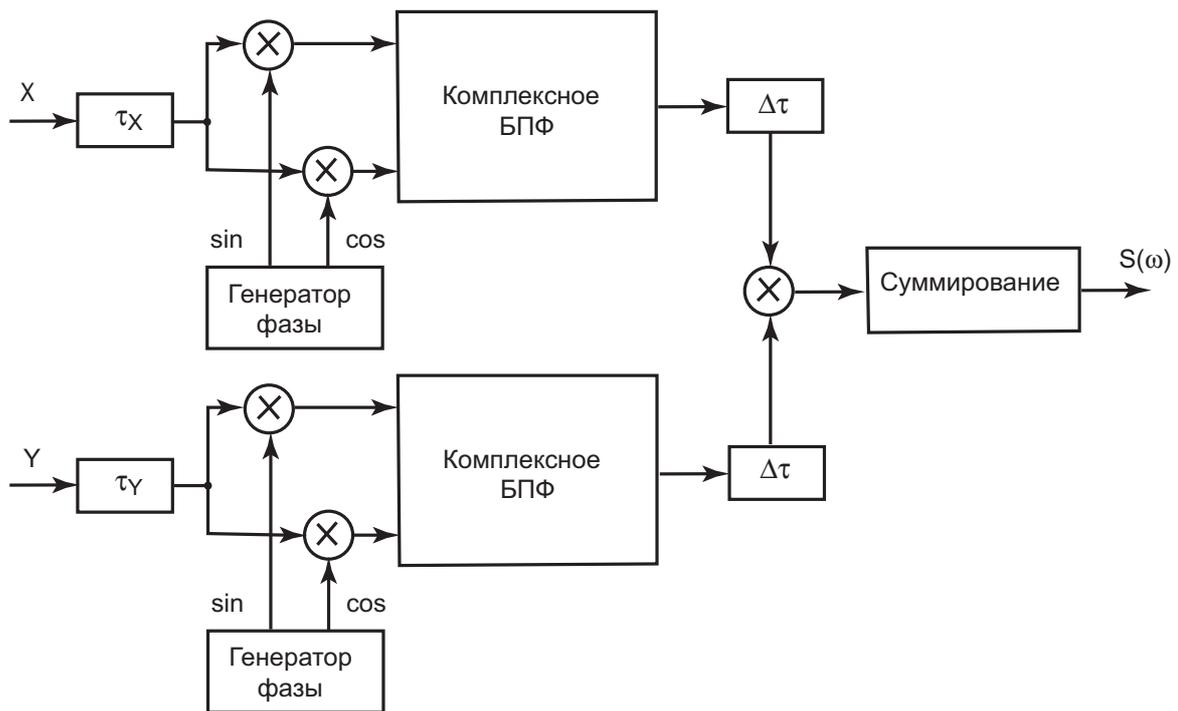


Рис. 3.16: Схема XF-коррелятора, построенного по принципу «станция интерферометра».

Как видно из рис. 3.16 FX-коррелятор построен по схеме «станция интерферометра». Каждый из сигналов задерживается на расчетную задержку относительно центра Земли, потом фаза сдвигается для остановки полос интерференции. Затем формируются блоки фиксированной длины (обычно от 1024 до 8096 бит), которые с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ) трансформируются в комплексный спектр. Спектры исправляются за частичное смещение бит. В спектральной области это соответствует умножению спектров на фазу, которая изменяется пилообразным образом. На рис. 3.16 эта операция отмечена прямоугольником с знаком  $\Delta\tau$ . После коррекции комплексные спектры  $X$  и  $Y$  сигналов перемножаются и результат суммируется для получения комплексного кросскорреляционного спектра  $S(\omega)$ .

### 3.6.7 DiFX-коррелятор

Схема DiFX (Distributed FX) — распределенного программного FX-коррелятора [82, 84] показана на рис. 3.17.

Данные загружаются в память с диска или из сети под управлением пакета Datastream. Корреляция выполняется под управлением коммутатора FxManager. Для этого коммутатор FxManager выбирает из потоков дан-

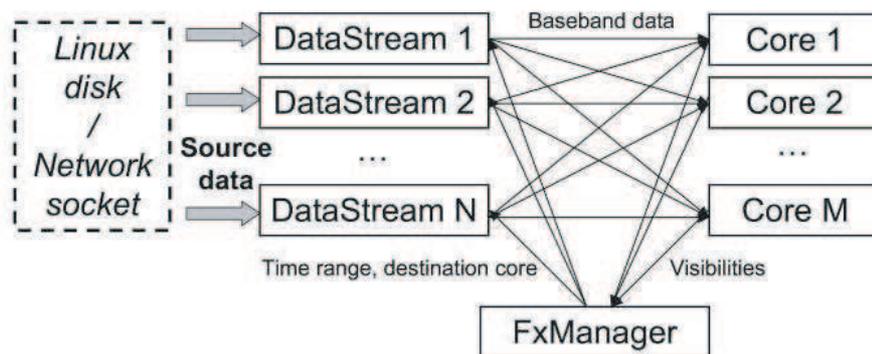


Рис. 3.17: Схема DiXF-коррелятора (из [84]).

ных сегменты записей, формирует пары записей (базы) и направляет на процессоры (Core). Результаты обработки отправляются на хранение (под управлением FxManager). Коды (на C++) пакета DiFX открыты и могут быть загружены с сайта <http://astronomy.swin.edu.au/adeller/software/difx/>.

Программные DiFX-корреляторы будут использоваться для обработки огромных потоков данных с разрабатываемой сети малых антенн — VLBI2010.

### 3.7 Сеть VLBI2010

Одним из амбициозных проектов Международной службы РСДБ является проект VLBI2010 [173].

РСДБ-система нового поколения VLBI2010 была предложена Международной службой РСДБ для геодезии и астрометрии (IVS) в 2003 г. Целью создания этой системы является удовлетворение требований науки и практики по точности основных данных, поставляемых IVS: параметров вращения Земли, координат станций, длин баз, координат радиосточников, а также различных геофизических параметров. Основные задачи, решаемые системой VLBI2010, были выработаны комитетом IVS (см. отчет на сайте <ftp://ivscc.gsfc.nasa.gov/pub/misc/V2C/TM-2009-214180.pdf>) на основе отчета рабочей группы (WG3 IVS) (<ftp://ivscc.gsfc.nasa.gov/pub/annual-report/2005/pdf/spcl-vlbi2010.pdf>) и могут быть сформулированы в виде:

- непрерывный мониторинг ПВЗ и координат станций;
- точность ПВЗ: 25-50 мкс дуги для координат полюса, 2-3 мкс для UT1;
- время задержки выдачи ПВЗ потребителям: не более 24 ч;

- точность координат станций и длин баз: 1 мм за 24 часа;
- точность скоростей станций: 0,1 – 0,3 мм/год за один год.

Заметим, что смещение опорной точки антенны на 1 мм соответствует примерно 30 мкс дуги в угловой мере. Этой величиной (1 мм), следовательно, определяются точностные характеристики определения ПВЗ новой системой. В свою очередь точностные характеристики, оперативность решения задач определения ПВЗ задают технические требования к системе VLBI2010.

Новая международная РСДБ сеть будет построена на множестве (30-40) малых 10-12 метровых быстровращающихся (не менее 5-6 градусов в секунду) антенн, разнесенных на большие расстояния (от 1000 до 10000 км). Они будут соединены оптоволоконными линиями связи с центром корреляционной обработки и анализа и должны работать непрерывно. Большие антенны будут включаться в работу эпизодически для контроля возможных систематических отличий определений ПВЗ старой и новой системами.

На основе отчета рабочей группы (WG3 IVS) можно сделать вывод, какие технические преимущества получит служба IVS при создании сети РСДБ по проекту VLBI 2010:

- благодаря большому числу антенн будет возможно ежесуточное определение всех ПВЗ с помощью РСДБ с более высокой точностью, чем в настоящее время;
- благодаря работе в квазиреальном времени, увеличится вклад РСДБ измерений в ежесуточную и еженедельную информацию о ПВЗ;
- объем информации о ПВЗ от РСДБ станет сравнимым с объемом информации от спутниковых методов, в том числе и для координат полюса, что позволит более точно учитывать систематические разности между разными видами измерений;
- существенно увеличится точность оперативных значений всемирного времени UT, что позволит улучшить прогнозирование UT;
- применение прецизионных методов сличения опорных стандартов частоты с использованием оптоволоконных линий связи приведет к оперативному определению ПВЗ в реальном времени на интервалах в несколько десятков минут.

Особо следует иметь в виду возможность использования антенн VLBI2010 для наблюдения спутников глобальных навигационных систем (ГНСС) (при расширении полосы приема до 1,1 - 1,6 ГГц). Есть две причины для выполнения этой работы. Первая - это уточнение орбит спутников GPS/ГЛОНАСС и определение их координат непосредственно в инерциальной системе ICRF. Эти наблюдения также необходимы для связи двух систем: кинематической ICRF и динамической ГНСС. Вторая причина - выполнение дифференциальных измерений между антенной РСДБ и спутниковой антенной ГНСС для изучения неприливных движений первой, а также для установления локальных геодезических связей.

Возникает вопрос, почему система малых антенн не стала создаваться ранее, например, 10 лет назад. Ответ заключается в том, что для осуществления проекта малых антенн был необходим существенный прогресс в РСДБ технологиях, который произошел именно в последнее десятилетие. Основные достижения этого процесса:

- разработка технологии изготовления антенн из новых материалов (углепластика), что позволило существенно понизить их вес;
- разработка приемной аппаратуры нового поколения с твердотельными МШУ, способной работать в полосе частот 2-14 ГГц с шумовыми температурами 10 – 20°K;
- разработка системы регистрации с записью на жесткие диски (типа Mark-5) со скоростью записи до 1 Гбит/с;
- увеличение скорости передачи информации (оптоволоконные и спутниковые каналы);
- создание программных высокоскоростных корреляторов для обработки информации с большого числа станций.

Для достижения целей и задач службы определения ПВЗ система малых антенн должна удовлетворять ряду требований, а именно необходимы:

- широкая полоса регистрации (не менее 2-14 ГГц);
- регистрация сигнала в четырех разнесенных видеополосах с возможностью гибкой оперативной перестройки параметров преобразования сигналов;
- увеличение числа наблюдений за счет: а) увеличения скорости вращения антенн; б) уменьшения длительности «скана», равного времени наблюдения и времени перевода антенны на другой источник;

- в) повышения скорости регистрации до 32 Гб/с для сохранения приемлемого отношения сигнал-шум; г) использования новых алгоритмов вычисления интерферометрической задержки при пониженном отношении сигнал-шум; д) совершенствования алгоритмов планирования наблюдений;
- уменьшение систематических ошибок результатов наблюдений за счет:
    - а) использования антенн с повышенной стабильностью опорной точки; б) применения методов точного геодезического контроля деформаций и подвижек антенны; в) применения новых систем калибровки; г) совершенствования алгоритмов планирования наблюдений; д) разработки методов учета структурной задержки; е) увеличения числа и оптимального размещения станций.

Требования к антеннам и аппаратуре сети VLBI2010 сформированы исходя из точностных характеристик определения положения опорной точки. Для определения положения этой точки с ошибкой менее 1 мм задержка должна измеряться с ошибкой не более 4 пс. Это на порядок точнее, чем можно получить, используя действующие  $S/X$  приемные системы. Поэтому предлагается использовать прием сигнала в четырех полосах по 1 ГГц в диапазоне от 2 до 14 ГГц. Теоретически с помощью такой системы удастся при отношении сигнал-шум около 10 в полосе 1 ГГц разрешить фазовую задержку и определить ее с погрешностью  $\sim 2$  пс. Фактически применение этой технологии, названной «широкополосная задержка» (broadband delay) означает переход от измерений групповой задержки к измерениям фазовой задержки.

Помимо того, что отношение сигнал-шум (SNR) для радиоинтерферометра должно быть не меньше 10, должно быть достаточное количество точечных мощных радиоисточников, равномерно распределенных по небесной сфере. Исходя из предположения, что скорость регистрации составляет 8 Гб/с (с увеличением до 32 Гб/с), диаметр антенны составляет 12 м, коэффициент использования поверхности равен 50%, температура системы равна 50 К, то можно наблюдать 185 источников, имеющих плотность потока более 250 мЯн. В этом случае отношение сигнал-шум будет достаточным, чтобы уверенно найти корреляцию за время накопления около 5 с.

Блок-схема радиоинтерферометра со сверхдлинной базой сети VLBI2010 показана на рис. 3.18.

Архитектура этого радиоинтерферометра значительно отличается от существующих РСДБ (рис. 3.1). Отличия, во-первых, связаны с тем, что на время наблюдения источника и перевод антенны на другой источник (скан) отводится 20-30 секунд; во-вторых, увеличены требования к точности из-

мерения задержки; в-третьих, повышены требования к автоматизации и надежности электроники.

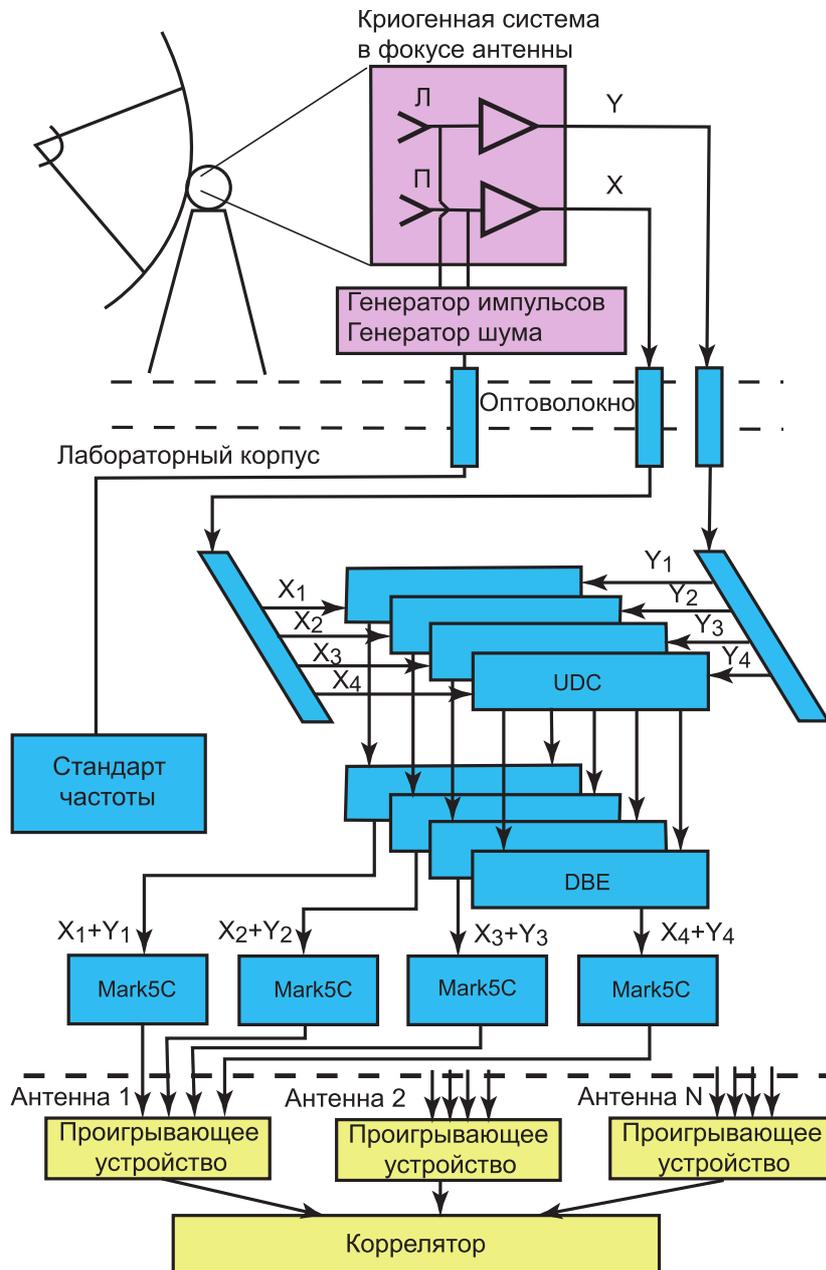


Рис. 3.18: Схема радиоинтерферометра со сверхдлинной базой сети VLBI2010.

Рассмотрим схему радиоинтерферометра.

Вместо приема сигнала в двух фиксированных полосах S и X-диапазона наблюдения будут вестись в четырех полосах, которые могут располагаться произвольным образом в диапазоне от 2 до 14 ГГц. Наблюдения будут выполняться одновременно в двух линейных поляризациях: правой и левой. Каждая полоса имеет ширину 1 ГГц (т.е. каждый отсчет записывается

с частотой дискретизации 2 ГГц). В системе VLBI2010 будет использоваться двухбитное квантование (отводится 2 бита на отсчет).

Таким образом, максимальный поток данных с одной антенны предполагается равным 32 Гбит/с (4 полосы  $\times$  2 поляризации  $\times$  частоту дискретизации =  $2 \times 10^9$  отсчетов/с  $\times$  2 бит/отсчет).

Принципиальные требования к оборудованию станции сети VLBI2010 таковы:

- антенна должна быть относительно малого размера, легкой, но жесткой, быстро вращающейся;
  1. диаметр:  $\sim 12$  м ;
  2. качество поверхности (ср.кв.ошибка):  $\sim 0,3$  мм;
  3. диапазон вращения: по азимуту  $\pm 270^\circ$ , по углу места  $5 \div 90^\circ$ ;
  4. максимальная скорость вращения: по азимуту  $12^\circ/\text{с}$ , по углу места  $6^\circ/\text{с}$ ;
  5. диапазон частот антенны  $1 \div 32$  ГГц;
  6. шумовая температура системы (без атмосферы):  $\sim 20^\circ\text{K}$ ;
  7. SEFD:  $< 2000$  Ян;
  8. точность наведения: лучше  $0,005^\circ$  при скорости ветра до  $45$  км/ч на всех углах места;
  9. стабильность опорной точки антенны: не хуже  $1$  мм;
  10. время эксплуатации  $20$  лет при нагрузке  $2500$  сканов в сутки.
- облучатель охлаждаемый, прием в двух линейных поляризациях в полосе  $2 \div 14$  ГГц;
- системы преобразования сигналов и регистрации должны обеспечить работу в произвольном числе полос заданной ширины и режима квантования при суммарной скорости регистрации (во время скана) до  $32$  Гб/с:
  1. приемник (front end receiver) включает два широкополосных МШУ для двух поляризаций, системы шумовой и фазовой калибровки для ввода сигналов в приемный тракт, что необходимо для калибровки аналоговой части системы вплоть до АЦП;
  2. широкополосный RF сигнал  $2 \div 14$  ГГц передается от антенны в лабораторный корпус по оптоволоконному кабелю; это уменьшает число кабелей между антенной и лабораторным корпусом,

позволяет выполнить частотное преобразование сигналов, фильтрацию в условиях постоянства температуры в лабораторном корпусе;

3. сигналы обеих поляризаций записываются в четырех частотных каналах;

- станция должна работать в автоматическом режиме, включая взаимодействие с центрами управления и сбора данных всей РСДБ-сети.

Четыре полосы приема позволяют реализовать метод синтеза широкой полосы.

Каждая RF полоса преобразуется к промежуточной полосе в диапазоне от 0 до 3 ГГц программируемым конвертером (up-down converter, UDC). Сигнал на выходе конвертера оцифровывается и передается на регистратор (digital back end, DBE).

Данные записываются на диски, которые перевозятся в центр обработки (в перспективе передаются по оптоволоконным кабелям).

Корреляция выполняется с помощью программных корреляторов.

Особые требования предъявляются к облучателю. Положение фазового центра не должно меняться в широкой полосе частот 2 – 14 ГГц. В настоящее время нет разработок облучателей с необходимыми характеристиками для приема сигналов в двух круговых поляризациях. Поэтому в проекте VLBI2010 будут использоваться облучатели, принимающие сигнал в двух линейных поляризациях. В используемых в настоящее время антеннах РСДБ используются облучатели с круговой поляризацией.

Основной недостаток облучателей с линейной поляризацией — это синусоидальная зависимость амплитуды интерференционных полос от разницы между главными направлениями диаграмм направленности (осями) облучателей на разных антеннах: при вращении Земли меняется ориентация облучателя при альт-азимутальной монтировке антенны по отношению к радиоисточнику. Для двух широко разнесенных антенн разность между осями облучателей может достигать  $90^\circ$ , что уменьшает амплитуду интерференционных полос до нуля. Эта проблема решается применением облучателей, принимающих сигнал в двух поляризациях.

Поскольку невозможно изготовить широкополосный облучатель с круговой поляризацией, то выходом является генерирование сигнала с круговой поляризацией из двух сигналов с линейной поляризацией. Эта операция будет выполняться после корреляции, когда получены все четыре кросскорреляционные функции между двумя линейно поляризованными сигналами.

Основная задача системы калибровки фазы — это измерение инструментальной фазовой задержки. Для системы VLBI2010 важно знать абсолютное значение этой задержки. При условии, что общая ошибка задержки должна быть менее 4 пкс, ошибка измерения инструментальной задержки должна быть менее 1 пкс. В существующих РСДБ инструментальная задержка измеряется с помощью генератора импульсных сигналов. Опорный сигнал 5 МГц от стандарта частоты передается по кабелю в приемную кабину антенны и подаются на туннельный диод, который генерирует импульсы с коротким фронтом ( $\sim 30$  пкс). Импульсы вводятся в приемный тракт до первого МШУ, проходят все стадии преобразования сигнала и после АЦП определяется задержка. Подобная система будет использоваться и в сети VLBI2010.

Кроме системы калибровки фазы в сети VLBI2010 будет использоваться и система калибровки шума. Как и в существующих РСДБ, в основе системы лежит калиброванный шумящий диод.

## Глава 4

# Редукция наблюдений на радиointерферометре со сверхдлинной базой

Редукция наблюдений на радиointерферометре со сверхдлинной базой основывается на стандартах Международной службы вращения Земли (IERS Conventions 2003)[115]. В первую очередь в стандартах дается определение земной и небесной систем координат, определение матрицы преобразования  $W$  между этими системами и параметров, входящих в матрицу  $W$ , определение шкал времени в разных системах отсчета и преобразования моментов времени из одной системы в другую, приводятся численные значения констант, а также алгоритмы вычисления приливных и неприливных смещений пунктов, расположенных на поверхности Земли. Кроме этого приводятся формулы для оценки задержки радио- и оптических сигналов в атмосфере Земли.

В 2011 г. была издана уточненная версия стандартов МСВЗ 2010 г. (IERS Conventions 2010) [116]. Разработка новой версии стандартов выполнена на основе рекомендаций рабочей группы МСВЗ по стандартам для согласования прежней версии 2003 года с резолюциями Генеральных Ассамблей ИАГБ 2006 г. и 2009 г.

Использование стандартов является обязательным для центров анализа наблюдений РСДБ, но также и для других служб МСВЗ.

Рассмотрим кратко определения систем координат, шкал времени и алгоритмов преобразования координат и времени, поскольку это краеугольный камень редукции высокоточных наблюдений в современную эпоху [9].

## 4.1 Системы координат

Основными рабочими системами координат являются следующие системы:

1. барицентрическая с началом координат в центре масс Солнечной системы,
2. геоцентрическая, с началом координат в центре масс Земли,
3. топоцентрические, связанные с опорной точкой антенны.

Рассматриваются только прямоугольные системы координат. Геоцентрические системы координат разделяются на вращающиеся и небесные инерциальные системы, сохраняющие неизменное положение осей в пространстве относительно квазаров.

### 4.1.1 Константы (Стандарты международной службы вращения Земли – IERS Conventions 2003)

В таблице 4.1 приводятся значения постоянных из «Стандартов МСВЗ» 2003 г. (IERS Conventions 2003); в первой колонке приводятся обозначения постоянных и их размерность, во второй — численное значение (в «ТСГ/ТСВ»-единицах СИ), в третьей — ошибка, в четвертой — комментарий. Большинство значений постоянных приводятся в единицах СИ; они согласованы для использования с геоцентрическим координатным временем ТСГ, которое является временной координатой для геоцентрической системы, или с барицентрическим координатным временем ТСВ, которое является временной координатой для барицентрической системы.

Значения постоянных  $\tau_A$  и  $st_A$  приводятся, однако, в «ТДВ»-единицах. Координаты пунктов в системе ITRF2000 и более поздних приводятся в «ГТ»-единицах (см. ниже).

«ТДВ»-единицы и «ТСВ»-единицы времени  $t$ , длины  $\ell$  и массы  $M$  связаны соотношениями:

$$t_{TDB} = t_{TCB}(1 - L_B), \quad \ell_{TDB} = \ell_{TCB}(1 - L_B),$$

$$GM_{TDB} = GM_{TCB}(1 - L_B),$$

коэффициент  $L_B$  приводится в таблице 4.1. Следовательно, преобразование величины  $X$ , имеющей размерность времени или длины ( $x_{TCB}$ ) в «ТСВ»

(СИ-единицах) к численному значению  $x_{TDB}$  в «ТДВ»-единицах, имеет вид:

$$x_{TDB} = x_{TCB}(1 - L_B).$$

Аналогично, численное значение  $x_{TCG}$  (из таблицы) связано с численным значением  $x_{TT}$  в «ТТ»-единицах уравнением

$$x_{TT} = x_{TCG}(1 - L_G),$$

где  $L_G$  также приводится в таблице 4.1.

Таблица 4.1: Стандарты МСВЗ 2003

1	2	3	4
$c$ , [мс <sup>-1</sup> ]	299792458	Определяющая	Скорость света
$L_B$	$1.55051976772 \times 10^{-8}$	$2 \times 10^{-17}$	Среднее значение $1 - d(TT)/d(TCB)$
$L_C$	$1.48082686741 \times 10^{-8}$	$2 \times 10^{-17}$	Среднее значение $1 - d(TCG)/d(TCB)$
$L_G$	$6.969290134 \times 10^{-10}$	Определяющая	$1 - d(TT)/d(TCG)$
$G$ , [м <sup>3</sup> кг <sup>-1</sup> с <sup>-2</sup> ]	$6.673 \times 10^{-11}$	$1 \times 10^{-13}$	Гравит. пост.
$GM_\odot$ , [м <sup>3</sup> с <sup>-2</sup> ]	$1.32712442076 \times 10^{20}$	$5 \times 10^{10}$	Гелиоцентрическая гравит. пост.
* $\tau_A$ , [с]	499.0047838061	$2 \times 10^{-8}$	Астроном. ед. в сек
* $\sigma_{TA}$ , [м]	149597870691	6	Астроном. ед. в м
$\varepsilon_0$	84381''4059	0''0003	Наклон эклиптики на эпоху J2000.0
$J_{2\odot}$	$2 \times 10^{-7}$	(принято для DE405)	Динам. форм-фактор Солнца
$\mu$	0.0123000383	$5 \times 10^{-10}$	Отношение масс Луна/Земля
$GM_\oplus$ , [м <sup>3</sup> с <sup>-2</sup> ]	$3.986004418 \times 10^{14}$	$8 \times 10^5$	Геод. гравит. постоянная (EGM96)
+ $a_E$ , [м]	6378136.6	0.10	Экватор. рад. Земли
+ $1/f$	298.25642	0.00001	Обратная величина сжатия Земли
+ $J_{2\oplus}$	$1.0826359 \times 10^{-3}$	$1.0 \times 10^{-10}$	Динам. форм-фактор
$\omega$ , [рад/с]	$7.292115 \times 10^{-5}$	Переменная	Ном. ср. значение угловой скор. Земли
+ $g_e$ , [мс <sup>-2</sup> ]	9.7803278	$1 \times 10^{-6}$	Ср. знач. ускорения силы тяж. на экват.
$W_0$ , [м <sup>2</sup> с <sup>-2</sup> ]	62636856.0	0.5	Потенциал на геоиде
$R_0$ , [м]	6363672.6	0.1	Геопот. коэф. $R_0 = GM_\oplus/W_0$

\* Значения постоянных  $\tau_A$  и  $\sigma_{TA}$  даны в «ТДВ»-единицах.

+ Значения постоянных  $a_E$ ,  $1/f$ ,  $J_{2\oplus}$  и  $g_E$  даны в системе «нулевого прилива» («zero tide»).

Временной шкалой для эфемерид DE405/LE405 является не шкала TCB, а  $T_{eph}$ , отличающаяся от TCB линейным дрейфом:

$$t_{eph} = t_{TCB}(1 - L_B),$$

Таблица 4.2: Значения масс планет (в обратных солнечных массах) в системе МАС1976, эфемеридах DE200 и DE405

Планета	МАС1976	DE200	DE405
Меркурий	6023600	6023600	6023600
Венера	408523.5	408523.5	408523.71
Земля + Луна	328900.5	328900.55	328900.561400
Марс	3098710.	3098710.	3098708.
Юпитер	1047.355	1047.350	1047.3486
Сатурн	3498.5	3498.0	3497.898
Уран	22869	22960	22902.98
Нептун	19314	19314	19412.24
Плутон	3000000	130000000	135200000

то есть шкала  $T_{eph}$  близка к шкале TDB. Поэтому гравитационные постоянные тел и пространственные координаты Солнечной системы, получающиеся из динамического анализа на основе эфемерид DE405/LE405, измеряются в «TDB»-единицах.

В таблице 4.2 приводятся значения масс планет (в обратных солнечных массах) в системе астрономических постоянных МАС 1976 г., а также значения масс в эфемеридах DE200 и DE405.

В соответствии с резолюциями Генеральных Ассамблей МАС 2006 г. и 2009 г. в версии стандартов МСВЗ 2010 г. определения констант были изменены. В таблице 4.3 приводятся значения констант из [116]. Скорость света названа естественной определяющей константой, константы  $k$ ,  $L_G$ ,  $L_B$ ,  $TDB_0$ ,  $\theta_0$ ,  $d\theta/dt$  — вспомогательными определяющими константами.

### 4.1.2 Барицентрическая система координат

Принятая МАС небесная система координат (ICRS) задается положениями внегалактических радиоисточников; начало находится в барицентре Солнечной системы; оси системы фиксируются на эпоху J2000.0. Предполагается, что внегалактические радиоисточники не имеют собственного движения, поэтому считается, что эта система координат не имеет вращения и может считаться инерциальной. В действительности источники, как показывают наблюдения, имеют видимые движения до нескольких десятков микросекунд дуги в год [10]. Поэтому небесная система координат является квазиинерциальной.

Таблица 4.3: Стандарты МСВЗ 2010

1	2	3	4
<b>Естественная определяющая постоянная</b>			
$c$ , [мс <sup>-1</sup> ]	299792458	Определяющая	Скорость света
<b>Вспомогательная определяющая постоянная</b>			
$k$	$1.720209895 \times 10^{-2}$	Определяющая	Гауссова гравитационная
$L_G$	$6.969290134 \times 10^{-10}$	Определяющая	$1 - d(\text{TT})/d(\text{TCG})$
$L_B$	$1.550519768 \times 10^{-8}$	Определяющая	$1 - d(\text{TDB})/d(\text{TCB})$
$TDB_0$ , [с]	$-6.55 \times 10^{-5}$	Определяющая	TDB – TCB (JD 2443144.5 TAI)
$\theta_0$ , [оборотов]	0.7790572732640	Определяющая	Угол поворота Земли (ERA) на J2000.0
$d\theta_0$ , [оборотов/UT1сутки]	1.00273781191135448	Определяющая	Скорость изменения ERA
<b>Естественная измеримая постоянная</b>			
$G$ , [м <sup>3</sup> кг <sup>-1</sup> с <sup>-2</sup> ]	$6.67428 \times 10^{-11}$	$6.7 \times 10^{-15}$	Гравитационная
<b>Постоянные, связанные с Солнцем и Луной</b>			
<sup>1</sup> $GM_\odot$ , [м <sup>3</sup> с <sup>-2</sup> ]	$1.32712442099 \times 10^{20}$	$1 \times 10^{10}$	Гелиоцентрическая гравитационная
$J_{2\odot}$	$2.0 \times 10^{-7}$	(принято для DE421)	Динам. форм-фактор Солнца
$\mu$	0.0123000371	$4 \times 10^{-10}$	Отношение масс Луна/Земля
<b>Постоянные, связанные с Землей</b>			
<sup>2</sup> $GM_\oplus$ , [м <sup>3</sup> с <sup>-2</sup> ]	$3.986004418 \times 10^{14}$	$8 \times 10^5$	Геоц. гравитационная
<sup>3</sup> $a_E$ , [м]	6378136.6	0.10	Экватор. рад. Земли
<sup>3</sup> $J_{2\oplus}$	$1.0826359 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-10}$	Динам. форм-фактор
<sup>3</sup> $1/f$	298.25642	0.00001	Обратная величина сжатия Земли
<sup>3</sup> $g_e$ , [мс <sup>-2</sup> ]	9.7803278	$1 \times 10^{-6}$	Ср. знач. ускорения силы тяжести на экваторе
$W_0$ , [м <sup>2</sup> с <sup>-2</sup> ]	62636856.0	0.5	Потенциал на геоиде
$R_0$ , [м]	6363672.6	0.1	Геопот. коэффициент $R_0 = GM_\oplus/W_0$
$H$	$3273795 \times 10^{-9}$	$1 \times 10^{-9}$	Динамическое сжатие
$\varepsilon_0$	84381''406	0''001	Наклон эклиптики на эпоху J2000.0
<b>Другие постоянные</b>			
<sup>4</sup> $au$ , [м]	$1.49597870700 \times 10^{11}$	3	Астрономическая единица
$L_C$	$1.48082686741 \times 10^{-8}$	$2 \times 10^{-17}$	Среднее значение $1 - d(\text{TCG})/d(\text{TCB})$

<sup>1</sup> Значение постоянной  $GM_\odot$  дано в «TCB»-единицах.<sup>2</sup> Значение постоянной  $GM_\oplus$  дано в «TCG»-единицах.<sup>3</sup> Значения постоянных  $a_E$ ,  $1/f$ ,  $J_{2\oplus}$  и  $g_E$  даны в системе «нулевого прилива» («zero tide»).<sup>4</sup> Значение постоянной  $\tau_A$  дано в «TDB»-единицах.

В настоящее время имеется две реализации небесной системы координат: ICRF1 [157] и ICRF2 [158]. Стабильность ICRF1 определяется положениями 212 так называемых «определяющих» радиоисточников. В принципе координаты источников не привязаны к положению эклиптики и точке весеннего равноденствия, но для сохранения преемственности они бы-

ли привязаны к фундаментальному каталогу звезд FK5 в пределах ошибок координат последних. Всего в каталоге ICRF1 содержится 608 источников, т.е. 394 источника были добавлены к 212 определяющим для более плотного заполнения. Наблюдения были выполнены на РСДБ с августа 1979 по июль 1995 г. Каталог ICRF1 был принят как реализация небесной системы (ICRS) XXIII Генеральной Ассамблеей МАС с 1 января 1998 г. Дополнительные каталоги (ICRF1-Ext.2), включающие 109 квазаров [94] были получены позже на основе наблюдений на РСДБ с 1995 по 2003 гг. Средняя ошибка координат источников из каталога ICRF1 равна примерно 250 микросекунд (мкс) дуги, стабильность осей  $\sim 20$  мкс дуги.

Новый каталог ICRF2 получен на основе наблюдений на РСДБ с августа 1979 г. по март 2009 г. Наблюдения проводились на двух частотах S/X-диапазонов (2,3/8,4 ГГц); всего было 4540 сеансов, в течение которых получено примерно 6,5 миллиона задержек, т. е. столько условных уравнений было использовано для получения координат квазаров.

Каталог содержит координаты 3414 источников. Из них 2197 источников наблюдались по одному разу. Среди оставшихся 1217 источников 295 были названы «определяющими», т.е. положения этих источников определяют положение и стабильность ICRF2. Среди этих 295 источников только 97 были определяющими в ICRF1.

Стабильность новой системы оценивалась путем вычисления ориентации осей ICRF2 и ICRF1-Ext.2 на основе различных групп источников. Разброс параметров матриц вращения показывает, что оси стабильны на уровне 10 мкс дуги.

### 4.1.3 Геоцентрическая система координат ITRF, жестко связанная с Землей

Международная земная система отсчета (International Terrestrial Reference System, ITRS), по определению, есть геоцентрическая система с началом в центре масс Земли, включая океаны и атмосферу, вращающаяся вместе с Землей. Единицей длины является метр (СИ). Шкалой координатного времени является шкала геоцентрического координатного времени TCG, Geocentric Coordinate Time (см. § 4.2).

Ось  $Z$  системы ITRS в пределах  $\pm 30$  мс дуги совпадает с условным международным началом (Conventional International Origin, CIO). Это было сделано для того, чтобы избежать появления скачков в движении полюса при замене систем координат. По определению, условное международное начало есть среднее положение земного полюса по измерениям на интер-

вале с 1900 г. по 1905 г., выполненным Международной службой широты (предшественницей МСВЗ), в состав которой входили пять обсерваторий, расположенных на широте  $39^{\circ}08'$ .

Ось  $X$  лежит в плоскости Гринвичского меридиана и экватора, ось  $Y$  лежит в плоскости меридиана с долготой  $90^{\circ}$  и дополняет систему до правой.

Международная опорная земная система отсчета (International Terrestrial Reference Frame, ITRF) реализуется декартовыми координатами  $X, Y, Z$  и скоростями  $V_x, V_y, V_z$  ряда реперных точек. Скорости точек обусловлены тектоническими движениями плит земной коры.

История ITRF начинается в 1984 г., когда впервые были получены координаты реперных точек. Они были найдены на основе совместного уравнивания координат радиотелескопов, лазерных дальномеров и доплеровских приемников сигналов с искусственных спутников Земли. Совместное уравнивание позволило также привязать систему координат, определяемую на основе РСДБ наблюдений, к центру масс Земли. В основу уравнивания был положен принцип коллокации: предполагается, что скорости инструментов, расположенных в одном месте (коллокационном пункте), одинаковы. Для построения системы ITRF2000 в семидесяти коллокационных пунктах использовались инструменты двух разных типов (например, радиотелескоп и GPS-приемник), в 25 пунктах — три и в 4 пунктах — 6 различных инструментов.

За прошедшие 25 лет были получены двенадцать версий ITRF, начиная с ITRF88 и заканчивая последней — ITRF2008. В «Стандартах МСВЗ», вышедших в 2004 г., при всех астрометрических и геодезических работах рекомендуется использовать систему ITRF2000, в стандартах 2010 г. — систему ITRF2008. Полная информация об определении систем, их связи содержится на сайте <http://lareg.ensg.ign.fr/ITFR>.

Преобразование прямоугольных координат вектора из одной опорной земной системы в другую выражается с помощью семи параметров  $T_1, T_2, T_3, D, R_1, R_2, R_3$  и их первых производных  $\dot{T}_1, \dot{T}_2, \dot{T}_3, \dot{D}, \dot{R}_1, \dot{R}_2, \dot{R}_3$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_2 &= \mathbf{X}_1 + \mathbf{T} + D\mathbf{X}_1 + R\mathbf{X}_1, \\ \dot{\mathbf{X}}_2 &\approx \dot{\mathbf{X}}_1 + \dot{\mathbf{T}} + \dot{D}\mathbf{X}_1 + \dot{R}\mathbf{X}_1,\end{aligned}$$

где  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$  — радиусы-векторы одной и той же точки, выраженные в опорных земных системах (1) и (2),  $\mathbf{T}$  — радиус-вектор начала отсчета системы (1) относительно (2),  $D$  — масштабный множитель,  $R$  — матрица враще-

ния:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -R_3 & R_2 \\ R_3 & 0 & -R_1 \\ -R_2 & R_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Система ITRF2000 реализуется координатами и скоростями более чем 800 точек, жестко связанных с корой Земли, и расположенных примерно в 500 пунктах. Система ITRF2008 задается координатами и скоростями уже 934 точками в 580 пунктах. Каждая из точек представляет собой либо особую точку инструмента (например, пересечение осей радиотелескопа), либо геодезический маркер.

Ориентация осей ITRF2000 и ее стабильность во времени обеспечивается соответствующим выбором реперных точек. Критерии выбора реперных точек следующие:

- 1) наблюдения должны быть непрерывными в течение не менее трех лет;
- 2) точки должны располагаться на значительном расстоянии от границ тектонических плит и от разломов внутри плит;
- 3) ошибка вычисления скорости точки (в решении ITRF2000) должна быть меньше 3 мм/год;
- 4) разброс в скорости точки по, как минимум, трем разным решениям (например, РСДБ, GPS и лазерным дальномерам) не должен превышать 3 мм/год.

Изменение в ориентации осей ITRF2000 связано с кинематической моделью движения плит земной коры NNR-NUVEL-1A [42]. В соответствии с этой моделью вся поверхность Земли разбита на 16 плит, каждая из которых вращается, но суммарное вращение земной коры равно нулю. Обозначение NNR (no-net-rotation) говорит об отсутствии глобального вращения земной коры и, следовательно, системы ITRF2000, жестко связанной с корой.

Система ITRF2000 характеризуется следующими свойствами:

- 1) шкалой времени в ITRF2000 является шкала земного времени TT (Terrestrial Time); таким образом, если требуется найти координаты, совместимые со шкалой геоцентрического координатного времени TCG, то используется формула

$$x_{TCG} = x_{TT}(1 + L_G);$$

- 2) координаты и скорости пунктов приводятся на эпоху 1997.0;
- 3) масштабный множитель  $D$  при преобразовании между ITRF2000 и системой, задаваемой координатами радиотелескопов, равен нулю;
- 4) начало координат реализуется приравниваем нулю вектора  $\mathbf{T}$  между ITRF2000 и системой, задаваемой координатами лазерных дальномеров.

Таким образом достигается совмещение начала координат ITRF2000 с центром масс Земли с ошибкой менее 10 мм. Особо отметим, что пространственные координаты в системе ITRF2000 согласованы со шкалой ТТ. Решение об использовании в системе ITRF2000 в качестве временной координаты земного времени ТТ было принято потому, что все центры при обработке наблюдений используют время ТТ.

Преобразование координат  $\mathbf{R}_i = (X, Y, Z)_i$   $i$ -го пункта наблюдения выполняется по формуле:

$$\mathbf{R}_i(t) = \mathbf{R}_i^0 + \mathbf{V}_i^0(t - t_0) + \Delta\mathbf{R}_i(t), \quad (4.1)$$

где  $\mathbf{R}_i^0, \mathbf{V}_i^0$  — положение и скорость телескопа, расположенного в  $i$ -м пункте, на эпоху каталога  $t_0$ . Поправки  $\Delta\mathbf{R}_i(t)$  к координатам пункта на момент наблюдения  $t$  вычисляются на основе моделей приливов в твердой Земле и океанических приливов, переменной атмосферной нагрузки на кору Земли, термического расширения телескопа и т.д.

В пакете АРИАДНА (см. ниже) используется версия ITRF2005, возможно также использование каталога VTRF2008, полученного Международной РСДБ службой (IVS). Системы ITRF2005, ITRF2008, VTRF2008 построены по тем же принципам, что и ITRF2000, только координаты и скорости пунктов приводятся на эпоху J2000.0.

#### 4.1.4 Приливы и определение земной системы координат

Рассмотрим влияние приливов на определение земной системы координат.

Потенциал в точке наблюдения складывается из гравитационного потенциала внешних тел (Солнца, Луны и планет) и геопотенциала, возмущенного приливными деформациями. Внешний потенциал включает как зависящие от времени гармоники, так и постоянную во времени часть. Аналогично, и приливное смещение точки наблюдения содержит постоянную и переменную во времени компоненты.

В зависимости от способа учета приливов земная система координат может быть определена как система,

- связанная со «средней» корой,
- корой, свободной от приливов.

Геопотенциал также может быть представлен в системе,

- связанной со «средним» приливом,

- свободной от приливов,
- соответствующей «нулевому приливу».

Если из мгновенных координат пункта, жестко связанного с корой Земли, или из потенциала, вычесть зависящие от времени приливные поправки, то результирующие координаты будут отнесены к «средней» коре; оставшиеся приливные поправки называются «средним приливом» (mean tide). Результирующий потенциал называется потенциалом, соответствующим «среднему приливу». *Постоянная часть приливной деформации, которая вызывается потенциалом, присутствует в «средней» коре; геопотенциал «среднего прилива» равен сумме постоянной части внешнего возмущающего и постоянной части возмущенного потенциалов.* «Средняя» кора соответствует реальным средним положениям пунктов на поверхности Земли. Геоидом, соответствующим «среднему приливу», был бы геоид, совпадающий со средней поверхностью океана в отсутствии негравитационных возмущений (течений и ветров). В общем случае, величины, отнесенные к «средней» коре (такие как сжатие, динамический форм-фактор, экваториальный радиус), определяют размеры эллипсоида «средней» коры и форму геоида «среднего прилива».

Если теперь из координат пункта вычесть постоянную часть прилива, то координаты будут отнесены к коре, свободной от приливов (tide free). Удаление постоянной части *внешнего* потенциала из геопотенциала «среднего прилива» приводит к потенциалу «нулевого прилива» (zero tide). Постоянная часть возмущенного потенциала все еще присутствует в геопотенциале; удаление этой компоненты приводит к геопотенциалу, свободному от приливов (tide free). Важно заметить, что в отличие от потенциала термин «нулевой прилив», примененный к *коре* и связанным с ней величинам, является синонимом термина «средний прилив» (рис. 4.1).

Почему при вычислении смещения пунктов или геопотенциала особое внимание уделяется постоянному приливу? Дело в том, что Земля не является абсолютно твердым телом: под действием внешних сил расстояние между двумя произвольными точками изменяется. Земля не является и абсолютно упругим телом. Если действие внешних сил прекращается, то точки не возвращаются в первоначальное положение, т. е. Земля остается в деформированном состоянии. Для описания упругих деформаций Земли английский геофизик Ляв ввел безразмерные параметры  $k$ ,  $h$  (позже японский ученый Шида определил число  $l$ ), которые сейчас называются числами Лява. Числа Лява связаны с модулями упругости Земли (величинами, характеризующими упругие свойства материалов при малых деформациях). В настоящее время доказано, что упругие свойства Земли, и, следо-

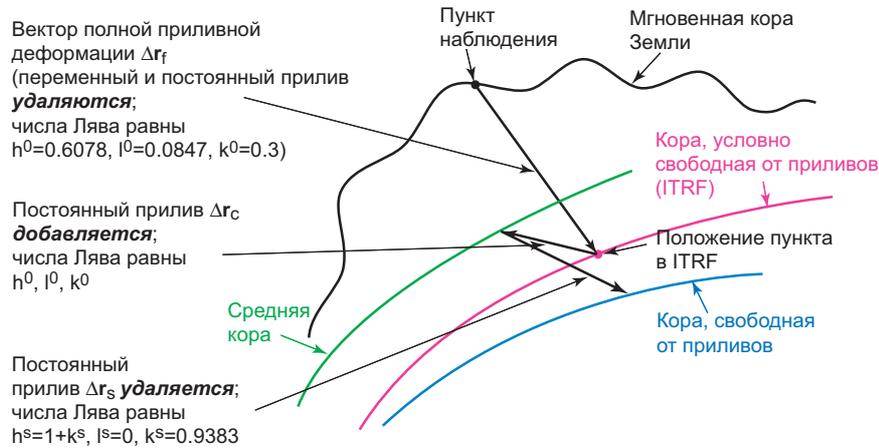


Рис. 4.1: Определение земной коры, «условно свободной от приливов», «свободной от приливов», и «средней» коры. Для определения положения пункта в системе ITRF из его мгновенного радиуса-вектора вычитается вектор  $\Delta r_f$  полной приливной деформации, причем постоянное смещение вычисляется с использованием принятых чисел Лява. Добавление вектора  $\Delta r_c$  постоянного смещения определяет координаты пункта в системе, связанной со «средней» корой. Если из полученного радиуса-вектора вычесть вектор  $\Delta r_s$  постоянного смещения, вычисленный для вековых чисел Лява  $h^s, l^s$ , то получим вектор пункта наблюдения в системе, «свободной от приливов».

вательно, числа Лява зависят от частоты воздействующей на Землю силы. Для принятой модели строения Земли были рассчитаны числа Лява, на основе которых вычисляется приливное смещение пункта. Но вычисленная поправка к координатам пункта не является правильной из-за того, что для низких частот (или больших периодов) числа Лява известны с большими ошибками. Поэтому при вычислении коры, свободной от приливов, используются принятые числа Лява; значит, часть долгопериодических (или вековых) приливов, в том числе и постоянный прилив, остается в координатах пункта. Деформации Земли, вызываемые постоянным приливом, характеризуются вековым числом Лява, которое значительно отличается от принятого в модели. Если ошибка в величине числа Лява составляет лишь 5%, то ошибка в вертикальном смещении составит 6 мм, а в горизонтальном — 3 мм. Это значит, что в чистом виде кора, свободная от приливов, не может быть реализована.

Так как модель учета приливов неточна из-за незнания долгопериодических чисел Лява, то геопотенциал и земная система координат, основан-

ные на использовании этой модели, называются «условно свободными от приливов» (conventional tide free). *Координаты станций, задающие земную систему координат ITRF2000, условно свободны от приливов.*

На это определение ITRF необходимо обратить особое внимание в связи с резолюцией 16 Генеральной Ассоциации Геодезии (1983). В резолюции записано, что «признавая необходимость единого подхода к учету приливных поправок к различным геодезическим величинам, таким как сила тяжести и координаты станций» рекомендуется «не удалять не прямой эффект, вызываемый постоянной деформацией Земли», т. е. постоянная часть возмущенного потенциала должна оставаться в геопотенциале. Из этой резолюции следует, что при обработке гравиметрических наблюдений должны использоваться величины, связанные с потенциалом «нулевого прилива», а при обработке геодезических наблюдений величины связываются со «средней» корой.

В действительности это решение до сих пор не учитывается при обработке наблюдений, в частности, при анализе данных космических навигационных систем. Координаты станций, используемые при анализе, заданы в системе, «условно свободной от приливов» (в ITRF2000). Чтобы перейти от координат в этой системе к координатам в системе, связанной со средней корой, необходимо к компонентам радиуса-вектора пункта в ITRF *добавить* радиальную  $\Delta r$  и тангенциальную поправки  $\Delta r_\theta$ :

$$\begin{aligned}\Delta r &= [-0,1206 + 0,0001P_2(\sin \varphi)]P_2(\sin \varphi) \text{ [м]}, \\ \Delta r_\theta &= [+0,0252 + 0,0001P_2(\sin \varphi)] \sin 2\varphi \text{ [м]},\end{aligned}$$

где  $P_2(\sin \varphi) = (3 \sin^2 \varphi - 1)/2$  — полином Лежандра,  $\varphi$  — широта пункта в системе ITRF. Поправка  $\Delta r$  на полюсах имеет величину примерно  $-12$  см и  $+6$  см на экваторе.

#### 4.1.5 Геоцентрическая небесная инерциальная система координат GCRS

Шкалы координатного времени TCG и TCB были введены резолюциями Генеральной Ассамблеи МАС в 1991 г. как временные координаты в системах отсчета с началом в центрах масс Земли и Солнечной системы соответственно. В резолюциях Генеральной Ассамблеи МАС в 2000 г. эти системы названы как геоцентрическая (GCRS) и барицентрическая (BCRS) небесные системы отсчета.

Так как наблюдения проводятся с Земли, то они являются событиями с координатами  $(T, \mathbf{X})$  в GCRS. Оси GCRS фиксированы относительно ква-

заров, но сама геоцентрическая небесная система отсчета движется вокруг барицентра Солнечной системы.

Преобразование координат из системы ITRF в GCRS выполняется путем умножения на матрицу поворота  $W$  (см. § 4.2.2).

В основе вычислений временных задержек сигналов при РСДБ-наблюдениях квазаров, лазерных наблюдений спутников и Луны лежит геоцентрическая небесная система координат (GCRS), временной шкалой которой является координатное время TCG. Наблюдаемая задержка определяется в шкале собственного времени атомных часов, установленных на пунктах наблюдений. Так как часы синхронизируются в шкале UTC, то можно считать, что они имеют одинаковый ход относительно координатной шкалы TT. Поэтому задержка может рассматриваться как временной интервал  $\tau_{TT}$  координатного времени TT.

Возможны два подхода при интерпретации задержки сигнала, в которых используются две различные геоцентрические координатные системы и две шкалы координатного времени TCG и TT.

В первом подходе, который полностью согласован с резолюциями МАС, все величины (координаты векторов, временные задержки) должны быть преобразованы к GCRS-координатным величинам; в качестве шкалы времени используется TCG. В этом подходе измеренная временная задержка должна быть преобразована в TCG-координатный интервал:

$$\tau_{TCG} = \frac{\tau_{TT}}{1 - L_G}.$$

Координаты радиусов-векторов пунктов вычисляются в GCRS, как того и требуют резолюции МАС; обозначим их как  $x_{TCG}$ , поскольку они согласованы со шкалой TCG.

Во втором подходе используется задержка, измеряемая в шкале времени TT. В этом случае координаты радиусов-векторов пунктов вычисляются уже не в GCRS, а в другой системе. Преобразование этих координат в GCRS (на уровне ошибок измерений) есть простое изменение масштаба. Пространственные координаты  $x_{TT}$ , получающиеся из анализа лазерных данных или данных РСДБ, согласованы со шкалой TT. Координаты  $x_{TCG}$  могут быть получены, использованием простого уравнения:

$$x_{TCG} = \frac{x_{TT}}{1 - L_G}.$$

*Все центры анализа данных РСДБ и лазерных данных используют второй подход, следовательно, вычисляют пространственные координаты  $x_{TT}$  и используют шкалу TT как шкалу координатного времени.*

Несмотря на принятие резолюций МАС, все центры анализа данных будут продолжать использовать второй подход, причем координаты *не должны* пересчитываться в  $x_{TCG}$  для вычисления их значений в земной системе координат ITRF2000 и более поздних версиях. Это значит, что шкала ITRF2000 *не согласуется* с резолюциями МАС.

## 4.2 Определения шкал времени

Время в любой шкале времени выражается в секундах, прошедших с момента 2000 г., январь 1, 12<sup>h</sup> в этой шкале времени.

*Стандартной эпохой* является момент 2000 г., январь 1, 12<sup>h</sup> ТТ (J2000.0). Юлианская дата эпохи J2000.0 равна 2451545,0. Система юлианских дат первоначально была определена для шкалы УТ. Однако, начиная с 1998 г. МАС рекомендует относить юлианские даты к земному времени (ТТ).

Часто удобнее использовать модифицированную юлианскую дату МJD, также рекомендованную МАС:

$$\text{MJD} = \text{JD} - 2400000,5. \quad (4.2)$$

Юлианская дата произвольного момента времени выражается в виде целого числа (номера юлианского дня) и дробной части, равной доле суток, прошедшей от полудня до рассматриваемого момента. Длительность юлианских суток равна 86400 секундам СИ.

Юлианская эпоха для известной юлианской даты JD определяется формулой:

$$\text{Юлианская эпоха} = 2000.0 + \frac{\text{JD} - 2451545,0}{365,25}.$$

*Шкала атомного времени* ТАИ (Temps Atomique International) равномерна на длительных промежутках времени и не зависит от вращения Земли. За единицу измерения времени принимается *атомная секунда* (секунда СИ), определяемая в соответствии с резолюцией XIII конференции Международного комитета мер и весов (1967 г.) как промежуток времени, в течение которого совершается 9192631770 колебаний, соответствующих частоте излучения атомом <sup>133</sup>Cs при резонансном переходе между энергетическими уровнями сверхтонкой структуры основного состояния при отсутствии внешних магнитных полей на уровне моря.

Шкала ТАИ вычисляется на основе индивидуальных шкал времени отдельных атомных стандартов, причем каждому стандарту, участвующему в выводе шкалы ТАИ, присваивается вес, который является функцией нестабильности частоты.

Начало отсчета времени в шкале TAI было выбрано таким образом, чтобы показания часов в шкалах TAI и UT1 совпадали в момент  $0^h$  UT 1 января 1958 г. Так как для этого момента разность  $\Delta T = ET - UT$  эфемеридного (ET) и всемирного времени (UT) равнялась  $32^s,184$ , то связь атомной шкалы TAI с ET установлена соотношением

$$ET = TAI + 32^s,184. \quad (4.3)$$

*Всемирное время* UT есть часовой угол среднего экваториального Солнца относительно Гринвичского меридиана плюс  $12^h$ . Время UT1 — это всемирное время *среднего* гринвичского меридиана, определяемого средним положением полюса Земли; оно получается исправлением времени UT0 на изменение долготы  $\Delta\lambda$  наблюдателя из-за смещения мгновенного полюса относительно среднего. Время UT1 определяет ориентацию среднего гринвичского меридиана, т.е. оси  $x$  земной системы координат.

Для точного вычисления звездного времени требуется знать разницу UT1 – UTC, которая находится на основе наблюдений и табулируется МСВЗ на начало каждых суток (UTC — всемирное координированное время, см. ниже). Для обеспечения большей точности интерполяции разности UT1 – UTC на произвольный момент времени МСВЗ рекомендует сначала удалить из UT1 предсказуемые периодические вариации, вызываемые зональными приливами. После вычисления интерполированного значения UT1 – UTC к нему следует добавить эти вариации. В «Стандартах МСВЗ» 1996 г. определены три модели периодических вариаций UT1. Исключение из UT1 короткопериодических гармоник (с периодами от 5 до 35 суток) приводит к системе всемирного времени, обозначаемой UT1R. Если из UT1 вычесть гармоники с периодами от 5 суток до 18,6 лет, вызываемые как зональными, так и долгопериодическими океаническими приливами, то получим систему UT1S. Если из UT1 вычесть 4 близсуточных и 4 полусуточных гармоники, которые связаны с приливами в океанах, то получим систему UT1D. В «Стандартах МСВЗ» 2003 г. приводится новая модель учета зональных вариаций во всемирном времени UT1, а также модель учета суточных и полусуточных вариаций в UT1 и в движении полюса, включающая 71 гармонику.

Часовой угол истинной точки весеннего равноденствия, отсчитываемый от Гринвичского меридиана, называется Гринвичским истинным звездным временем (Greenwich Apparent Sidereal Time, GAST). Оно используется для вычисления ориентации земной системы координат относительно небесной.

*Всемирное координированное время* UTC, по определению, связано не с суточным вращением Земли, а с атомной шкалой TAI. Вначале близость

шкал всемирного времени UT2 и всемирного координированного времени UTC в пределах 0,1 с достигалась ступенчатыми сдвигами частоты. Начиная с 1 января 1972 г. частотные сдвиги шкалы UTC отменены и введено изменение показаний часов, функционирующих в системе UTC, на  $\pm 1$  с, для того, чтобы разность UT1-UTC не превосходила  $\pm 0,9$  с.

Это изменение осуществляется путем прибавления секунды преимущественно 31 декабря и (или) 30 июня. Таким образом, шкала UTC является атомной шкалой, отличаясь от TAI на целое число секунд:  $\Delta AT = TAI - UTC$ . Изменение величины  $\Delta AT$  приводится в табл. 4.4.

Таблица 4.4: Даты изменения  $\Delta AT$ 

Календарная	Юлианская JD	$\Delta AT = TAI - UTC, c$
1972 JAN 1	2441317,5	10,0
1972 JUL 1	2441499,5	11,0
1973 JAN 1	2441683,5	12,0
1974 JAN 1	2442048,5	13,0
1975 JAN 1	2442413,5	14,0
1976 JAN 1	2442778,5	15,0
1977 JAN 1	2443144,5	16,0
1978 JAN 1	2443509,5	17,0
1979 JAN 1	2443874,5	18,0
1980 JAN 1	2444239,5	19,0
1981 JUL 1	2444786,5	20,0
1982 JUL 1	2445151,5	21,0
1983 JUL 1	2445516,5	22,0
1985 JUL 1	2446247,5	23,0
1988 JAN 1	2447161,5	24,0
1990 JAN 1	2447892,5	25,0
1991 JAN 1	2448257,5	26,0
1992 JUL 1	2448804,5	27,0
1993 JUL 1	2449169,5	28,0
1994 JUL 1	2449534,5	29,0
1996 JAN 1	2450083,5	30,0
1997 JUL 1	2450630,5	31,0
1999 JAN 1	2451179,5	32,0
2006 JAN 1	2453736,5	33,0
2009 JAN 1	2454832,5	34,0

Координаты события в BCRS обозначаются как  $(t, \vec{x})$  с временной координатой  $t = \text{TCB}$ . Начало пространственных координат находится в бари-

центре Солнечной системы, причем оси BCRS неподвижны относительно удаленных внегалактических радиоисточников. Потенциал Солнечной системы в точке  $\vec{x}$  определяется выражением:

$$U(t, \vec{x}) = \sum_p \frac{GM_p}{|\vec{x} - \vec{x}_p|},$$

в котором суммирование выполняется по всем телам.

Координаты события в GCRS обозначаются как  $(T, \vec{X})$  с временной координатой  $t = \text{TCG}$ . Начало пространственных координат находится в центре масс Земли, и оси GCRS не вращаются относительно удаленных внегалактических радиоисточников.

Шкала земного времени TT отличается от шкалы TCG только линейным дрейфом, и на геоиде потенциал  $W_0 = \text{const}$ . Поэтому TT может быть названо координатным временем на геоиде.

### 4.2.1 Преобразование времени

Шкалы координатного времени TCG и TCB были введены резолюциями Генеральной Ассамблеи МАС в 1991 г. как временные координаты в системах отсчета с началом в центрах масс Земли и Солнечной системы соответственно. В резолюциях Генеральной Ассамблеи МАС в 2000 г. эти системы названы как геоцентрическая (GCRS) и барицентрическая (BCRS) небесные системы отсчета. Для обеспечения обработки астрометрических наблюдений с микросекундной точностью метрические тензоры, описывающие пространство-время Солнечной системы, заданы с учетом членов до  $(v/c)^4$  [56].

В общем виде связь между земным временем TT и барицентрическим координатным временем  $t$  имеет вид:

$$t - \text{TT} = \eta \left[ L_C(t - t_0) + \frac{1}{c^2} \mathbf{V}_\oplus \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R}_\oplus) + P \right] + \eta L_G(t - t_0) - (\eta - 1)(t - t_0), \quad (4.4)$$

В зависимости от выбора величины  $\eta$  уравнение (4.4) выражает связь шкалы времени TT и одной из шкал координатного времени  $t$ . Здесь  $\mathbf{R}_\oplus$ ,  $\mathbf{V}_\oplus$  — барицентрические радиус-векторы положения и скорости центра масс Земли,  $\mathbf{r}$  — барицентрический радиус-вектор наблюдателя.

При  $\eta = 1$  в (4.4) имеем  $t = \text{TСВ}$ . Математическое соотношение между шкалами времени определяется как

$$\text{TСВ} - \text{TТ} = (\text{TСВ} - \text{TСГ}) + (\text{TСГ} - \text{TТ}),$$

$$\text{TСВ} - \text{TСГ} = L_C(t - t_0) + \frac{1}{c^2} \mathbf{V}_\oplus \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R}_\oplus) + P, \quad (4.5)$$

$$\text{TСГ} - \text{TТ} = L_G(t - t_0). \quad (4.6)$$

Выбор параметра  $\eta = 1$  приводит к тому, что длительность секунды в BCRS приравняется к длительности секунды в GCRS. При таком выборе  $\eta$  величины астрономических постоянных не меняются. Однако из-за зависимости течения времени от положения наблюдателя шкалы времени ТТ и ТСВ имеют довольно большой линейный дрейф ( $\sim 0,5$  с/год) и периодические вариации  $P$  ( $\sim 2$  мс).

В качестве второго варианта рассмотрим случай, когда  $\eta = 1 + L_G + L_C$ . Тогда

$$t - \text{TТ} = \frac{1}{c^2} \mathbf{V}_\oplus \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R}_\oplus) + P. \quad (4.7)$$

Время  $t$  было названо эфемеридным временем  $T_{eph}$ , которое служит аргументом при вычислении эфемерид DE405/LE405; несмотря на название  $T_{eph} \neq \text{ET}$ . Эфемеридное время  $T_{eph}$  физически и математически эквивалентно ТСВ, отличаясь от ТСВ только линейным дрейфом и началом отсчета.

Из выражения (4.7) следует, что разность  $T_{eph} - \text{TТ}$  не превышает 2 мс. Линейное смещение двух шкал исключается при вычислении эфемерид соответствующим подбором параметра  $\eta$ .

Периодические члены  $P$  в выражении (4.5) или (4.7) находятся по аналитической модели, предложенной в [91].

В заключение приведем соотношения между различными шкалами времени:

$$\Delta \text{UT1} = \text{UT1} - \text{UTC}, \quad (4.8)$$

$$\Delta \text{AT} = \text{TAI} - \text{UTC}, \quad (4.9)$$

$$\text{TТ} = \text{TAI} + 32^s, 184, \quad (4.10)$$

$$T_{eph} = \text{TТ} + \frac{1}{c^2} \mathbf{V}_\oplus \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R}_\oplus) + P, \quad (4.11)$$

где  $t - t_0 = (\text{MJD}(\text{TAI}) - 43144, 0) \cdot 86400^s$ .

Начальным моментом времени  $t_0$  является  $0^h 0^m 0^s$  TAI 1 января 1977 г. (MJD = 43144, 0). Заметим, что разность моментов барицентрического координатного времени  $t - t_0$  может быть заменена разностью моментов

атомного времени. Ошибка вычисления разности собственного и координатного времени при этом будет порядка  $10^{-18}$ .

Процедура преобразования, рекомендованная в стандартах 2010 г., после вычисления момента в шкале ТТ имеет вид:

$$\begin{aligned} \text{TCG} - \text{TT} &= L_G[\text{MJD}(\text{TAI}) - 43144, 0] \times 86400^s \\ \text{TCB} - \text{TCG} &= \frac{1}{1 - L_B}[L_C(\text{TT} - T_0) + P(\text{TT}) - P(T_0)] + \frac{1}{c^2} \mathbf{V}_\oplus \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R}_\oplus), \\ \text{TDB} &= \text{TCB} - L_B[\text{JD}(\text{TCB}) - T_0] \times 86400^s + \text{TDB}_0. \end{aligned}$$

Здесь  $L_G, L_B, L_C$  — определяющие постоянные,  $\text{TDB}_0 = -6.55 \times 10^{-5}$  с (табл. 4.3),  $\text{JD}(\text{TCB})$  — юлианская дата в шкале ТСВ,  $T_0 = 2443144.5003725$ .

### 4.2.2 Классическое преобразование из земной в небесную систему координат

Преобразование вектора из земной системы (ITRF) в небесную систему координат, задаваемую средним экватором и равноденствием на эпоху J2000.0, описывается уравнением:

$$\mathbf{r}_{GCRS} = W \mathbf{r}_{ITRF}, \quad (4.12)$$

где матрица преобразования определяется выражением:

$$W = PNR_3(-GAST)R_1(y_p)R_2(x_p). \quad (4.13)$$

Для вычисления матрицы преобразования необходимо сначала выполнить три поворота осей земной системы: сначала относительно оси  $y$  на угол  $x_p$ , затем относительно оси  $x$  на угол  $y_p$  и вокруг оси  $z$  на угол  $-GAST$ , после чего перемножить матрицы:

$$\mathbf{r}_T = R_3(-GAST)R_1(y_p)R_2(x_p)\mathbf{r}_{ITRF} = SYX\mathbf{r}_{ITRF}, \quad (4.14)$$

где  $\mathbf{r}_T$  — вектор в промежуточной системе. В уравнении (4.14)  $x_p, y_p$  — координаты небесного эфемеридного полюса (НЭП),  $GAST$  — истинное звездное время,  $R_i$  — матрицы вращения вокруг  $i$ -й оси:

$$\begin{aligned} R_1(\phi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}; R_2(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix}; \\ R_3(\phi) &= \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Затем  $\mathbf{r}_T$  умножается на матрицу нутации  $N$  и матрицу прецессии  $P$ .

В результате преобразования (4.12) оси земной системы координат будут повернуты и ориентированы так же, как оси барицентрической системы. Начало этой системы совпадает с центром Земли, но геоцентрическая небесная система отсчета GCRS движется вместе с Землей относительно барицентра Солнечной системы.

Явное выражение матрицы прецессии  $P$  — матрицы преобразования координат вектора, заданных на эпоху  $T$ , к координатам на эпоху  $T_0$  равна

$$P = R_3(\zeta_A)R_2(-\theta_A)R_3(z_A). \quad (4.16)$$

Если начальная эпоха  $T_0$  совпадает с эпохой J2000.0, то численные выражения прецессионных величин  $z_A, \theta_A, \zeta_A$  имеют вид [150]:

$$\begin{aligned} \zeta_A &= 2306^s2181t + 0^s30188t^2 + 0^s017998t^3, \\ \theta_A &= 2004^s3109t - 0^s42665t^2 - 0^s041833t^3, \\ z_A &= 2306^s2181t + 1^s09468t^2 + 0^s018203t^3, \end{aligned} \quad (4.17)$$

$t = T - T_0$  — число юлианских столетий от начальной эпохи до фундаментальной эпохи J2000.0:

$$t = \frac{\text{JD}(\text{TCB}) - 2451545,0}{36525}. \quad (4.18)$$

Эти выражения были получены Лиске и др. на основе разложений Ньюкомба в системе астрономических констант МАС 1976 г.

Матрицу прецессии можно найти также, используя выражение:

$$P = R_1(-\varepsilon_0)R_3(\psi_1)R_1(\varepsilon')R_3(-\chi), \quad (4.19)$$

где углы  $\psi_1, \chi, \varepsilon'$ , если начальная эпоха  $T_0$  совпадает с фундаментальной эпохой J2000.0, равны:

$$\psi_1 = 5038^s7784t - 1^s07259t^2 - 0^s001147t^3, \quad (4.20)$$

$$\chi = 10^s5526t - 2^s38064t^2 - 0^s001125t^3, \quad (4.21)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - 46^s8150t - 0^s0059t^2 + 0^s001813t^3, \quad (4.22)$$

$$\varepsilon' = \varepsilon_0 + 0^s05127t^2 - 0^s007726t^3. \quad (4.23)$$

Наклон эклиптики к экватору на эпоху J2000.0 равен  $\varepsilon_0 = 23^\circ 26' 21^s,448$ .

Международный астрономический союз рекомендовал использовать разложения (4.20-4.23) и (4.17), начиная с 1984 г.

Матрица  $N$  определяется выражением

$$N = R_1(-\varepsilon)R_3(\Delta\psi)R_1(\varepsilon + \Delta\varepsilon). \quad (4.24)$$

Наклон эклиптики к экватору  $\varepsilon$  вычисляется по формуле (4.22).

Для вычисления углов  $\Delta\varepsilon$  (нутаия в наклоне) и  $\Delta\psi$  (нутаия в долготе) используется теория нутаии IAU2000, которая содержит около 1500 членов; углы  $\Delta\psi$ ,  $\Delta\varepsilon$  выражаются в виде [81, 160]:

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= \sum_{i=1}^N (A_i + A'_i t) \sin \vartheta + (A''_i + A'''_i t) \cos \vartheta, \\ \Delta\varepsilon &= \sum_{i=1}^N (B_i + B'_i t) \cos \vartheta + (B''_i + B'''_i t) \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (4.25)$$

где

$$\vartheta = \sum_{j=1}^5 n_j F_j, \quad (4.26)$$

$n_j$  — целые числа,  $F_j$ , ( $j = 1, \dots, 5$ ) — фундаментальные аргументы, определяемые выражениями:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv l = \text{средняя аномалия Луны} \\ &= 134,96340251 + 1717915923,2178t + 31,8792t^2 \\ &\quad + 0,051635t^3 - 0,00024470t^4, \\ F_2 &\equiv l' = \text{средняя аномалия Солнца} \\ &= 357,52910918 + 129596581,0481t - 0,5532t^2 \\ &\quad - 0,000136t^3 - 0,00001149t^4, \\ F_3 &\equiv F = L - \Omega \\ &= 93,27209062 + 1739527262,8478t - 12,7512t^2 \\ &\quad - 0,001037t^3 + 0,00000417t^4, \\ F_4 &\equiv D = \text{средняя элонгация Луны от Солнца} \\ &= 297,85019547 + 1602961601,2090t - 6,3706t^2 \\ &\quad + 0,006593t^3 - 0,00003169t^4, \\ F_5 &\equiv \Omega = \text{средняя долгота восходящего узла Луны} \\ &= 125,04455501 - 6962890,5431t + 7,4722t^2 \\ &\quad + 0,007702t^3 - 0,00005939t^4. \end{aligned}$$

где  $t$  измеряется в юлианских столетиях по 36525 суток от эпохи J2000.0 (4.18),  $L$  — средняя долгота Луны.

Коэффициенты  $A_i''$ ,  $A_i'''$ ,  $B_i''$ ,  $B_i'''$ , появляющиеся в разложениях (4.25), определяются неупругими свойствами Земли и диссипацией приливной энергии.

### 4.2.3 Концепция «невращающегося начала отсчета»

На XXIV-й Генеральной Ассамблее ИАУ, которая проходила в Манчестере в 2000 г., были приняты несколько резолюций, касающихся вопроса преобразования координат при переходе от небесной к земной системам.

В резолюции В1.3 определяются барицентрическая и геоцентрическая небесные системы отсчета (BCRS и GCRS), которые должны использоваться при вычислении четырехмерных координат объектов при наблюдении из барицентра Солнечной системы и из центра Земли, соответственно. Системы BCRS и GCRS заданы метрическими тензорами, на основе которых получены формулы преобразования пространственных координат и времени.

В резолюции В1.6 рекомендуется, начиная с 1 января 2003 г., использовать теорию прецессии–нутаии ИАУ2000, которая должна заменить устаревшую теорию ИАУ1980. С этого же момента вводится промежуточная система, полюс которой называется небесным промежуточным полюсом (Celestial Intermediate Pole, CIP) вместо небесного эфемеридного полюса, НЭП (резолюция В1.7).

В основе концепции NRO лежат следующие соображения [61, 63].

Классическое преобразование (4.12) включает прецессионные  $z_A$ ,  $\theta_A$ ,  $\zeta_A$  и нутационные параметры  $\Delta\psi$ ,  $\varepsilon + \Delta\varepsilon$  и гринвичское истинное звездное время GAST. Эти параметры относятся к экватору и равноденствию даты и эклиптике даты. Однако современные системы, такие как РСДБ, GPS, лазерные дальнометры, используемые для изучения вращения Земли, практически нечувствительны к ориентации эклиптики и, значит, к положению точек равноденствий.

Есть и другие недостатки классического преобразования (4.12). Во-первых, угол поворота Земли, называемый гринвичским истинным звездным временем GAST, определяется положением точки весеннего равноденствия. Следовательно, мы не можем отделить неравномерность вращения Земли от смещения точки  $\Upsilon_T$  из-за движения экватора или поворота эклиптики. Положение усугубляется еще и тем, что, как уже сказано, радиоинтерферометрические наблюдения нечувствительны к движению эклиптики. Во-вторых, прецессия и нутация рассматриваются отдельно друг от друга, хо-

тя по природе это не независимые явления. В-третьих, повышение точности наблюдений требует новых, более точных методов редукции.

Вместо точки весеннего равноденствия в качестве начала отчета долгот в небесной и земной системах координат вводятся «невращающиеся начала отсчета» (или NRO), концепция которых была предложена Б. Гино [101]. Точки — новые начала отсчета — были названы *небесным эфемеридным началом* (Celestial Ephemeris Origin, CEO) для небесной системы и, соответственно, *земным эфемеридным началом* (Terrestrial Ephemeris Origin, TEO) для земной системы (резолюция B1.8). В резолюции определяется также «угол поворота Земли»  $\theta$  (Earth Rotation Angle), который равен двугранному углу между началами CEO и TEO и измеряется вдоль экватора, соответствующего небесному промежуточному полюсу (НПП). Всемирное время UT1 линейно пропорционально  $\theta$ . Преобразование координат вектора из земной системы ITRS в небесную систему GCRS определяется положением НПП в GCRS, положением НПП в ITRS и углом поворота Земли.

Преобразование координат вектора из ЗСК в НСК в соответствии с резолюцией B1.8 имеет вид:

$$\mathbf{r}_{GCRS} = W(t)\mathbf{r}_{ITRS} = Q(t)R(t)U(t)\mathbf{r}_{ITRS}, \quad (4.27)$$

где матрицы  $Q(t)$ ,  $R(t)$ ,  $W(t)$  представляют движение полюса в НСК, вращение Земли и движение полюса в ЗСК, соответственно. Матрицы равны:

$$U(t) = R_3(-s')R_2(x_p)R_1(y_p), \quad (4.28)$$

где  $x_p, y_p$  — координаты небесного промежуточного полюса (НПП) в ЗСК, величина  $s'$  задает положение земного эфемеридного начала в соответствии с кинематическим определением NRO в ITRS при смещении НПП относительно ITRS из-за движения полюса;

$$R(t) = R_3(-\theta); \quad (4.29)$$

$$Q(t) = R_3(-E)R_2(-d)R_3(E)R_3(s), \quad (4.30)$$

где  $d, E$  — сферические координаты НПП в небесной системе,  $s$  — параметр, задающий положение небесного эфемеридного начала. Матрица  $Q(t)$  (4.30) может быть выражена через прямоугольные координаты полюса  $X, Y, Z$  следующим образом:

$$Q(t) = \begin{pmatrix} 1 - aX^2 & -aXY & X \\ -aXY & 1 - aY^2 & Y \\ -X & -Y & 1 - a(X^2 + Y^2) \end{pmatrix},$$

где  $a = 1/2 + (X^2 + Y^2)/8$ ,

$$X = \sin d \cos E,$$

$$Y = \sin d \sin E,$$

$$Z = \cos d.$$

Время  $t$ , от которого зависят элементы матриц, отсчитывается в юлианских столетиях от эпохи J2000.0:

$$t = (JD(TT) - 2451545,0)/36525. \quad (4.31)$$

Численные выражения для вычисления параметров  $s'$ ,  $\theta$ ,  $s$ ,  $X$ ,  $Y$  получены Н. Капитейн [64, 65]. Величина  $s'$  зависит только от самых больших гармоник в движении полюса, т. е. от чандлеровской и годичной компонент:

$$s' = -0,0015(a_c^2/1,2 + a_a^2)t,$$

где  $a_c$ ,  $a_a$  — средние амплитуды чандлеровской и годичной компонент (в сек дуги). Используя современные значения амплитуд этих гармоник, получим:

$$s' = -47t \text{ мкс дуги.}$$

Угол поворота Земли равен [62]:

$$\theta(T_u) = 2\pi(0,7790572732640 + 1,00273781191135448T_u),$$

где

$$T_u = JD(UT1) - 2451545,0, \quad UT1 = UTC + (UT1 - UTC).$$

Для практических вычислений  $s$  используется формула:

$$s(t) = -\frac{1}{2} \left[ X(t)Y(t) - X(t_0)Y(t_0) \right] + \int_{t_0}^t \dot{X}(t)Y(t)dt,$$

где  $X(t)$ ,  $Y(t)$  представляются в виде рядов:

$$\begin{aligned} X(t) = & -0^d,01661699 + 2004^d,19174288t - 0^d,42721905t^2 \\ & - 0^d,19862054t^3 - 0^d,00004605t^4 + 0^d,00000598t^5 \\ & + \sum_i \left[ (a_{s,0})_i \sin(ARG) + (a_{c,0})_i \cos(ARG) \right] \\ & + \sum_i \left[ (a_{s,1})_i t \sin(ARG) + (a_{c,1})_i t \cos(ARG) \right] \\ & + \sum_i \left[ (a_{s,2})_i t^2 \sin(ARG) + (a_{c,2})_i t^2 \cos(ARG) \right] \\ & + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y(t) = & -0^d,00695078 - 0^d,02538199t - 22^d,40725099t^2 \\
& + 0^d,00184228t^3 + 0^d,00111306t^4 + 0^d,00000099t^5 \\
& + \sum_i \left[ (b_{s,0})_i \sin(ARG) + (b_{c,0})_i \cos(ARG) \right] \\
& + \sum_i \left[ (b_{s,1})_i t \sin(ARG) + (b_{c,1})_i t \cos(ARG) \right] \\
& + \sum_i \left[ (b_{s,2})_i t^2 \sin(ARG) + (b_{c,2})_i t^2 \cos(ARG) \right] \\
& + \dots
\end{aligned}$$

Время  $t$  задается формулой (4.31), а  $ARG$  вычисляется как функция фундаментальных аргументов теории нутации (стр. 160). Коэффициенты  $a, b$  можно найти на сайте: <ftp://tai.bipm.org/iers/conv2010/chapter5/> (таблица 5.2a для  $X$  и 5.2b для  $Y$ -компоненты).

Разложение для величины  $s$  (в мкс дуги), согласованное с теорией нутации IAU2000, имеет вид:

$$\begin{aligned}
s(t) = & -XY/2 + 94 + 3808,35t - 119,94t^2 - 72574,09t^3 \\
& + \sum_k C_k \sin \alpha_k + 1,71t \sin \Omega + 3,57t \cos 2\Omega \\
& + 743,53t^2 \sin \Omega + 56,91t^2 \sin(2F - 2D + 2\Omega) \\
& + 9,84t^2 \sin(2F + 2\Omega) - 8,85t^2 - \sin 2\Omega.
\end{aligned}$$

В выражении сохранены члены, величина которых превышает 0,5 мкс дуги. Разложение можно использовать на интервале времени от 1975 до 2025 г.

Аргументы  $\alpha_k$  и коэффициенты  $C_k$  приводятся в таблице 4.5.

Программы для вычисления матриц преобразования  $Q, R, U$  могут быть найдены на сайте <http://iau-sofa.hmnao.com/> рабочей группы IAU SOFA (Standards Of Fundamental Astronomy).

### 4.3 Вычисление задержки

Если обозначить один из телескопов первым, а другой — вторым, то вектор  $\mathbf{b}$ , равный  $\mathbf{b} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ , называется вектором базы, где  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  — радиус-векторы телескопов.

В системе BCRS задержка записывается в виде:

$$t_2 - t_1 = -\frac{1}{c} \mathbf{s} \cdot [\mathbf{r}_2(t_2) - \mathbf{r}_1(t_1)] + \Delta\tau_{grav}, \quad (4.32)$$

Таблица 4.5: Аргументы  $\alpha_k$  и коэффициенты  $C_k$  для вычисления  $s(t)$ .

$\alpha_k$	$C_k$ (мкс дуги)
$\Omega$	-2640,73
$2\Omega$	-63,53
$2F - 2D + 3\Omega$	-11,75
$2F - 2D + \Omega$	-11,21
$2F - 2D + 2\Omega$	+4,57
$2F + 3\Omega$	-2,02
$2F + \Omega$	-1,98
$3\Omega$	+1,72
$l' + \Omega$	+1,41
$l' - \Omega$	+1,26
$l + \Omega$	+0,63
$l - \Omega$	+0,63

где  $\mathbf{s}$  — единичный вектор в направлении источника из барицентра Солнечной системы в отсутствии гравитационного отклонения света и абберационного смещения,  $\mathbf{r}_1(t_1)$ ,  $\mathbf{r}_2(t_2)$  — барицентрические радиус-векторы телескопов в моменты  $t_1$ ,  $t_2$  (по шкале ТСВ) прихода фронта волны на телескопы,  $\Delta\tau_{grav}$  — гравитационная задержка радиосигнала в Солнечной системе.

Уравнение (4.32) преобразуется в уравнение для геоцентрической задержки. Для этого используются формулы релятивистского преобразования барицентрических векторов  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  в соответствующие геоцентрические векторы  $\mathbf{r}'_1$ ,  $\mathbf{r}'_2$  и промежутка времени  $t_2 - t_1$  (ТСВ) в промежуток времени ТСГ:  $t'_2 - t'_1$ . Решая эти два уравнения, можно выразить геоцентрическую задержку через геоцентрический вектор базы  $\mathbf{b}$ .

Это решение определяет задержку в шкале ТСГ, которая является шкалой координатного времени в системе GCRS. Векторы также выражаются в системе GCRS.

Однако метки времени, записываемые на магнитные ленты и используемые при корреляции сигналов, формируются стандартами частоты, которые, как мы знаем, отражают собственное время. В действительности перед началом наблюдений стандарты на всех телескопах, участвующих в сеансе РСДБ, синхронизируются между собой в шкале UTC с максимально возможной точностью. Поэтому можно считать, что измеренная задержка выражается не в собственном времени часов, а в шкале координатного времени TT (так как шкала TT отличается от шкалы UTC только смещением). Тогда в формуле для задержки  $t'_2 - t'_1$  (TT) вектор базы  $\mathbf{b}$  выражается не в

GCRS, а в другой системе: пространственные координаты, получаемые из анализа данных РСДБ, согласованы со шкалой TT, а не TCG.

Именно этот алгоритм используется во всех центрах анализа наблюдений на РСДБ. Координаты телескопов, следовательно, приводятся не в системе GCRS; масштаб земной системы координат ITRF2000 не удовлетворяет резолюциям МАС.

После того как разработана модель задержки, можно найти расчетные значения задержки и частоты интерференции (обозначим их как  $\tau_c$  и  $f_c$ ), которые равны геометрическим значениям плюс поправки за атмосферу и рассинхронизацию часов. Одновременно вычисляются частные производные задержки и частоты интерференции по параметрам модели.

Этот этап в соответствии с традициями астрометрии можно назвать редукцией РСДБ-наблюдений.

Современная точность измерения групповой задержки составляет в среднем  $\sim 3 \times 10^{-11}$  с или 30 пкс, а частоты интерференции —  $\sim 10^{-15}$  с/с. Поэтому точность вычисления задержки (точность модели наблюдений) должна быть не хуже 1 пкс (в линейной мере  $\sim 0,3$  мм).

На *втором* этапе обработки для каждого наблюдения разность измеренной и вычисленной задержки (частоты интерференции) представляется в виде разложения по малым параметрам — поправкам к принятым значениям параметров  $p_i$  модели:

$$\tau_o - \tau_c = \sum_i^N \frac{\partial \tau_c}{\partial p_i} \Delta p_i, \quad f_o - f_c = \sum_i^N \frac{\partial f_c}{\partial p_i} \Delta p_i, \quad (4.33)$$

причем число параметров  $N$  может быть различным в зависимости от конкретной задачи.

На *третьем* этапе выполняется оценивание параметров модели. Чаще всего для этого используется метод наименьших квадратов. Решение системы условных уравнений 4.33 дает поправки  $\Delta p_i$  к параметрам, которые нас интересуют.

### 4.3.1 Основные этапы редукции наблюдений на РСДБ

Для вычисления задержки с точностью  $\sim 1$  пкс необходимо знать координаты вектора базы с точностью  $\sim 0,3$  мм или с относительной погрешностью  $\sim 10^{-10}$  при длинах баз  $\sim 3 \div 5$  тыс. км. С аналогичной точностью необходимо предвычислять взаимную ориентацию вектора базы и вектора направления на источник. Взаимная ориентация этих векторов изменяется

вследствие вращения Земли, изменения ориентации Земли в инерциальном пространстве, приливных и тектонических движений пунктов РСДБ и т.д. Таким образом все эти явления должны быть учтены при моделировании задержки с относительной ошибкой, не превышающей  $\sim 10^{-10}$ .

Процедура расчета задержки (времени прохождения фронта волны от первой до второй антенны) рекомендована в стандартах МСВЗ и заключается в выполнении следующих этапов.

1. Все вычисления выполняются на момент собственного времени  $t'_1$  прихода сигнала на антенну с номером 1. Время  $t'_1$  измеряется часами для заданного эллипсоида в заданной земной системе координат. Как уже говорилось, масштаб системы ITRF2000 согласован с шкалой координатного времени ТТ. Сжатие эллипсоида и его большая полуось определяют кору Земли, «условно свободную от приливов».
2. Координаты телескопов вычисляются на момент наблюдения: учитывается тектоническое движение, приливы, изменение атмосферной нагрузки на земную кору, температурные деформации телескопов.
3. Координаты телескопов преобразуются в геоцентрическую небесную систему координат на эпоху J2000.0, движущуюся вместе с Землей. Это преобразование включает ряд поворотов систем координат, которые представляются в результате одной матрицей вращения  $W$ .
4. Используя преобразования Лоренца координаты телескопов преобразуются к системе отсчета, покоящейся относительно барицентрической системы координат с началом в барицентре солнечной системы.
5. Задержка прихода сигнала на антенну с номером 2 вычисляется в шкале координатного времени в барицентрической системе координат. К полученной задержке добавляется гравитационная задержка сигнала.
6. Обратное преобразование Лоренца преобразует задержку из барицентрической в геоцентрическую небесную систему, движущуюся с Землей, и вычисляется геометрическая геоцентрическая задержка.
7. Для вычисления расчетной задержки в геометрической задержке добавляются поправки, вызванные рассинхронизацией часов, задержкой сигнала с тропосфере и ионосфере Земли.

Чтобы получить выражение для частоты интерференции, необходимо продифференцировать по времени выражение для задержки.

### 4.3.2 Вычисление гравитационной задержки

Радиосигнал в Солнечной системе распространяется в гравитационном поле, которое создается Солнцем и другими телами. С достаточной точностью гравитационное поле Солнца и планет можно аппроксимировать полем тяготения точечной массы.

В гравитационном поле не только искривляется траектория фотона, но и изменяется его координатная скорость. Если первая причина приводит к изменению положения источника на небе, то вторая — к дополнительной задержке сигнала при прохождении им гравитационного поля.

Гравитационная задержка равна:

$$\Delta\tau_{grav} = \frac{2GM}{c^3} \cdot \ln \left( \frac{r_1 + \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{s}}{r_2 + \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{s}} \right). \quad (4.34)$$

Полная гравитационная задержка при распространении сигнала в Солнечной системе равна сумме задержек (4.34), вызванных гравитационным полем всех планет, включая Луну, кроме Земли. В формуле (4.34) векторы  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  являются радиус-векторами телескопов относительно гравитирующего тела с массой  $M$ . Вклад Юпитера и Сатурна в гравитационную задержку может достигать нескольких сотен, а Луны — нескольких пикосекунд. Величина гравитационной задержки, вызываемой полем Солнца, существенно зависит от положения Солнца относительно радиоисточника: при угловом расстоянии  $1^\circ$  задержка равна  $\sim 40$  нс, при расстоянии  $180^\circ$  — 400 пкс.

Для Земли гравитационная задержка выражается той же формулой, но векторы  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  являются радиус-векторами телескопов в системе GCRS, и равна  $\sim 20$  пкс.

### 4.3.3 Вычисление геометрической задержки

Для вычисления геометрической задержки будем считать, что радиоисточник находится на бесконечно большом расстоянии от наблюдателя, т.е. фронт приходящей волны — плоский.

Так как вычисления задержки должны выполняться для момента времени прихода фронта волны на телескоп №1, т.е.  $t_1$ , то разложим вектор  $\mathbf{r}_2(t_2)$  в ряд:

$$\mathbf{r}_2(t_2) = \mathbf{r}_2(t_1) + \dot{\mathbf{r}}_2(t_1)(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{r}}_2(t_1)(t_2 - t_1)^2 + \dots \quad (4.35)$$

Для телескопов, расположенных на Земле, скорость  $|\dot{\mathbf{r}}_2| \sim 30$  км/с, ускорение  $|\ddot{\mathbf{r}}_2| \sim 10^{-2}$  м/с<sup>2</sup>. Для максимальной базы, реализуемой на Земле

( $\sim 10000$  км), задержка  $t_2 - t_1$  равна  $\sim 0,03$  с. Значит вклад второго члена в длину вектора  $\mathbf{r}_2$  равен  $\sim 0,9$  км, третьего — менее  $0,01$  мм. Отсюда делаем вывод, что по сравнению с точностью вычислений ( $0,3$  мм) вкладом ускорения можно пренебречь.

В момент прихода плоского фронта волны на телескоп №1 его радиус-вектор относительно барицентра  $B$  солнечной системы равен  $\mathbf{r}_1(t_1)$ , где  $t_1$  — время ТСВ. В момент времени  $t_1$  радиус-вектор телескопа №2 в этой же системе равен  $\mathbf{r}_2(t_1)$  и в момент прихода фронта волны —  $\mathbf{r}_2(t_2)$  (рис. 4.2).

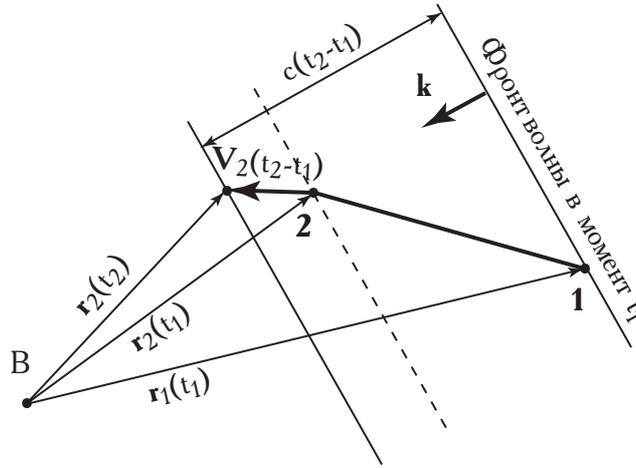


Рис. 4.2: Геометрия прихода фронта волны на РСДБ.

Пусть скорость второй антенны равна  $\mathbf{V}_2 = \dot{\mathbf{r}}_2$ . Тогда, используя уравнения (4.32) и (4.35), найдем

$$c(t_2 - t_1) = \mathbf{k} \cdot [\mathbf{r}_2(t_1) - \mathbf{r}_1(t_1)] + \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_2(t_1)(t_2 - t_1) + c\Delta\tau_{grav}, \quad (4.36)$$

где  $\mathbf{k}$  — единичный вектор в направлении распространения волны. Если  $\mathbf{s}$  — единичный барицентрический вектор источника, то  $\mathbf{k} = -\mathbf{s}$ . Из 4.36 получим:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta\tau_{grav} + \frac{1}{c}\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{1 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_2/c} = \frac{\Delta\tau_{grav} - \frac{1}{c}\mathbf{s} \cdot \mathbf{b}(t_1)}{1 + \mathbf{s} \cdot \mathbf{V}_2/c}, \quad (4.37)$$

$\mathbf{b}(t_1) = \mathbf{r}_2(t_1) - \mathbf{r}_1(t_1)$ . Все вектора в (4.37) вычисляются в барицентрической системе отсчета на момент времени  $t_1$ . Скорость второго пункта может быть представлена в виде суммы двух векторов: барицентрической скорости геоцентра  $\mathbf{V}_\oplus$  и линейной скорости  $\mathbf{w}_2 = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_2$ , определяемой вращением Земли, т.е.  $\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_\oplus + \mathbf{w}_2$ .

На этапе редукиции (пункт 6, см. § 4.3.1) задержку (4.37) необходимо пересчитать в геоцентрическую небесную систему [106, 15, 132, 204].

Для наземного интерферометра задержка сигнала в геоцентрической системе координат равна:

$$\Delta t' = \frac{\Delta \tau_{grav}}{1 + \frac{1}{c} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{V}_{\oplus} + \mathbf{w}_2)} - \frac{\frac{1}{c} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{b}') \left[ 1 - \frac{(1+\gamma_{PPN})U(\mathbf{r}_{\oplus})}{c^2} - \frac{|\mathbf{V}_{\oplus}|^2}{2c^2} - \frac{\mathbf{V}_{\oplus} \cdot \mathbf{w}_2}{c^2} \right] - \frac{1}{c^2} (\mathbf{V}_{\oplus} \cdot \mathbf{b}') \left( 1 + \frac{\mathbf{V}_{\oplus} \cdot \mathbf{s}}{2c^2} \right)}{1 + \frac{1}{c} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{V}_{\oplus} + \mathbf{w}_2)}, \quad (4.38)$$

$\mathbf{b}'$  — вектор базы в GCRS,  $U$  — гравитационный потенциал в геоцентре (на пикосекундном уровне точности  $U = GM_{\odot}/|\mathbf{r}_{\oplus}|$ ),  $\gamma_{PPN}$  — параметр пост-ньютоновского формализма ( $\gamma_{PPN} = 1$  для общей теории относительности).

Расчетная задержка  $\tau_c$  получается путем добавления к  $\Delta t'$  задержки в тропосфере и ионосфере, а также поправки за рассинхронизацию часов:

$$\tau_c = \Delta t' + (\delta D_2 - \delta D_1)/c + [(\tau_{ion})_2 - (\tau_{ion})_1] + C_0 + C_1(t - \bar{t}) + \frac{1}{2}C_2(t - \bar{t})^2, \quad (4.39)$$

где  $\delta D_1, \delta D_2$  — тропосферная задержка для телескопов 1 и 2. Ионосферная задержка  $(\tau_{ion})_1, (\tau_{ion})_2$  находится очень точно, если наблюдения велись одновременно на двух частотах. Основной вклад в ошибку вычисления  $\tau_c$  вносит неточность вычисления задержки в тропосфере, вызванной наличием водяного пара в тропосфере.

Обычно поправка за рассинхронизацию часов представляется в виде квадратичного полинома, коэффициенты  $C_0, C_1, C_2$  которого уточняются при решении системы условных уравнений (4.33);  $t$  — момент наблюдения в шкале UTC,  $\bar{t}$  — средний момент. Заметим, что  $C_0, C_1, C_2$  представляют собой разности соответствующих коэффициентов для двух часов  $i$  и  $j$ , т.е.  $C_0 = C_0^{(j)} - C_0^{(i)}$ ,  $C_1 = C_1^{(j)} - C_1^{(i)}$ ,  $C_2 = C_2^{(j)} - C_2^{(i)}$ .

При обсуждении схем корреляторов, построенных по схемам «база интерферометра» и «станция интерферометра» говорилось, что в последних сигналы с каждого пункта задерживаются на задержку относительно центра Земли (см. стр. 130), т.е. вычисляются задержки  $\Delta t'_{1-C}$ ,  $\Delta t'_{2-C}$  и т.д. Однако исходя из определения задержки (4.37) и (4.38) очевидно, что  $\Delta t'_{1-2} \neq \Delta t'_{1-C} - \Delta t'_{2-C}$ .

## 4.4 Определение опорной точки антенны

Расчет задержки выполняется для базы интерферометра, которая задается двумя точками. Предполагается, что эти точки фиксированы относительно коры Земли. На рис. 4.3 показана одна из антенн интерферометра.

Дадим определение опорной точки антенны.

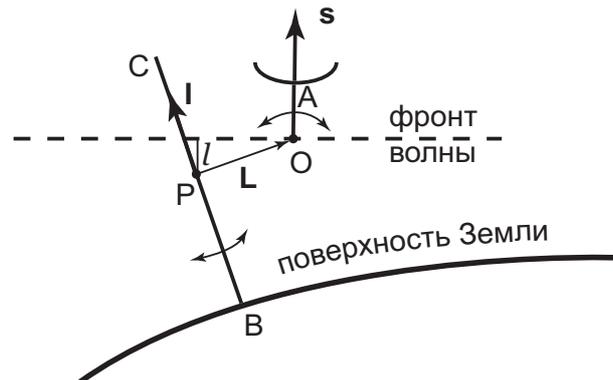


Рис. 4.3: Определение опорной точки антенны.

Пусть  $s$  — единичный вектор в направлении источника, исправленный за аберрацию. Обычно ось симметрии (главное направление  $OA$ ) антенны параллельна вектору  $s$ .

Точка  $O$  является проекцией оси вращения на плоскость страницы (считаем, что эта ось перпендикулярна плоскости страницы), и антенна может поворачиваться вокруг оси. Вторая ось ( $BC$ ) фиксирована относительно поверхности Земли и лежит в плоскости страницы. Вращение антенны вокруг оси  $BC$  может выполняться по или против часовой стрелки. Направление оси задается единичным вектором  $I$ , направленным от Земли.

Любая из точек оси  $BC$  может рассматриваться как точка, определяющая начало или конец вектора базы. Обычно за опорную точку выбирают точку  $P$ , которая определяется как точка пересечения оси  $BC$  плоскостью, в которой лежит ось  $O$  и которая перпендикулярна оси  $BC$ .

Точка  $O$  отстоит от второй оси  $BC$  на расстояние  $L = |L|$ . Вектор  $L$  направлен от точки  $P$  к точке  $O$ .

Рассмотрим теперь плоскость фронта волны, проходящей от источника в направлении  $s$ . Если  $l$  — длина перпендикуляра к плоскости волны, опущенного из точки  $P$ , то фронт достигнет точки  $P$  через промежуток времени  $\Delta t = l/c$  после того, как фронт пройдет точку  $O$ . Ось  $O$  фиксирована относительно оси  $BC$  и лежит в плоскости фронта волны.

Предположим, что расчетная задержка  $\tau_0$  вычислена для базы между точкой  $O$  и аналогичной точкой для другой антенны. При выборе в каче-

стве опорной точки  $P$  и аналогичной ей точки на другой антенне задержка будет равна:

$$\tau = \tau_0 - (\Delta t_2 - \Delta t_1) = \tau_0 + (l_1 - l_2)/c,$$

где индексы 1, 2 относятся к первой и второй антенне.

Найдем вектор  $\mathbf{L}$ . Так как все три вектора  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{I}$  лежат в одной плоскости, то

$$\mathbf{L} = L \frac{\mathbf{I} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{I})}{|\mathbf{I} \times (\mathbf{s} \times \mathbf{I})|}. \quad (4.40)$$

Антенны во время наблюдений должны сопровождать радиоисточник. Поэтому, для геодезических РСДБ используются полноповоротные антенны, установленные на экваториальных или альт-азимутальных монтировках (рис. 4.4).

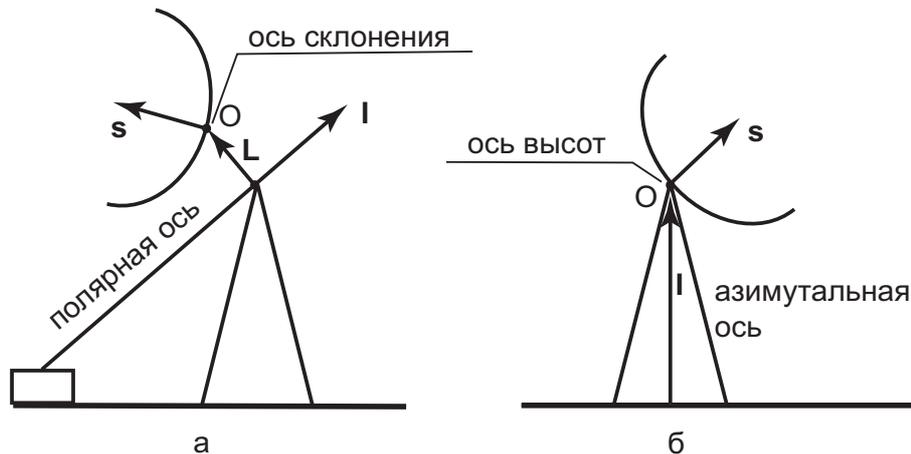


Рис. 4.4: Экваториальная (а) и альт-азимутальная (б) монтировка антенны.

В экваториальной монтировке полярная ось параллельна оси вращения Земли, и для сопровождения источника достаточно, чтобы антенна поворачивалась вокруг полярной оси со скоростью вращения небесной сферы. Экваториальные монтировки более сложны в изготовлении по сравнению с альт-азимутальными, и ими оснащались антенны, построенные до появления компьютеров для управления и преобразования координат.

Часто в антеннах с экваториальной монтировкой полярная ось и ось склонений не пересекаются. Во многих случаях смещение между осями достигает нескольких метров. Впервые учет этого смещения на точность фазовых измерений рассмотрен в работе [219], и была доказана необходимость учета величины этого смещения и его изменения. Очевидно, что величина смещения равна  $l$ :

$$l = \mathbf{s} \cdot \mathbf{L}.$$

Альт-азимутальные монтировки проектируются таким образом, чтобы оси азимутов и высот пересекались, в этом случае  $L = 0$ .

Все вычисления удобно производить в векторном виде. В местной локальной топоцентрической системе VEN ось  $x$  направлена в зенит (Vertical), ось  $y$  — на восток (East), ось  $z$  — на север (North). Тогда для альт-азимутальной монтировки вектор  $\mathbf{I}$  имеет компоненты:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а для экваториальной монтировки вектор:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \sin \varphi_{astr} \\ 0 \\ \cos \varphi_{astr} \end{pmatrix},$$

где  $\varphi_{astr}$  — астрономическая широта места установки антенны.

Так как по определению координаты источника (компоненты вектора  $\mathbf{s}$ ) заданы на эпоху J2000.0 в системе ICRS, то перед вычислением векторного произведения в (4.40) вектор  $\mathbf{I}$  должен быть умножен на матрицу преобразования от локальной топоцентрической системы VEN к ICRS.

## 4.5 Приливные и неприливные смещения антенн

Земля не является абсолютно твердым телом, поэтому ее кора деформируется под действием различных сил. Наибольший вклад вносят Солнце и Луна, под действием гравитационных сил притяжения которых точки коры периодически смещаются примерно на  $\pm 50$  см. Эти движения известны как приливные эффекты. Кроме приливного смещения антенн должны учитываться и неприливные смещения, которые вызываются атмосферной и океанической нагрузками, термическими деформациями. В результате к вектору антенны (ее опорной точки)  $\mathbf{r}_0$  в земной системе координат необходимо добавить вектор:

$$\Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{r}_{st} + \Delta \mathbf{r}_{pol} + \Delta \mathbf{r}_{atm} + \Delta \mathbf{r}_{ocn} + \Delta \mathbf{r}_{term}, \quad (4.41)$$

где слагаемые определяются приливами твердого тела Земли, полярным приливом, атмосферной и океанической нагрузками, термическими деформациями антенны. Все векторы удобно вычислять в локальной топоцентрической системе VEN (Vertical, East, North), в которой оси задаются единичными векторами  $\hat{r}$ ,  $\hat{e}$ ,  $\hat{n}$ . Для преобразования координат из системы VEN

к земной системе ITRF требуется вычислить матрицу поворота, зависящую от геодезических координат антенны  $\varphi_{geod}$ ,  $\lambda$ :

$$VW = R_3(-\lambda)R_2(\varphi_{geod}) = \begin{pmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda & 0 \\ \sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi_{geod} & 0 & -\sin \varphi_{geod} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi_{geod} & 0 & \cos \varphi_{geod} \end{pmatrix}.$$

### 4.5.1 Влияние приливов твердого тела Земли

Приливный потенциал в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}$  от притягивающего тела с массой  $M$ , радиус-вектор которого равен  $\mathbf{R}$ , равен:

$$U = \frac{GM}{R} \left[ \left( \frac{r}{R} \right)^2 P_2(\cos \theta) + \left( \frac{r}{R} \right)^3 P_3(\cos \theta) \right] = U_2 + U_3,$$

где  $G$  — гравитационная постоянная,  $\theta$  — угол между векторами  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{R}$ . Для вычисления смещения опорной точки телескопа учитываются только квадрупольная и октупольная составляющие потенциала. Вклад первой составляющей равен примерно 50 см, второй — несколько миллиметров. Процедуру вычисления смещения опорной точки телескопа из-за приливов твердого тела Земли удобно разбить на два этапа.

На первом шаге вычисляется вектор смещения для прилива степени 2 с использованием принятых значений числа Лява  $h_2$  и числа Шида  $l_2$

$$\Delta \vec{r} = \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j R_e^4}{GM_{\oplus} R_j^3} \left\{ h_2 \hat{r} \left( \frac{3}{2} (\hat{R}_j \cdot \hat{r})^2 - \frac{1}{2} \right) + 3l_2 (\hat{R}_j \cdot \hat{r}) [\hat{R}_j - (\hat{R}_j \cdot \hat{r}) \hat{r}] \right\}. \quad (4.42)$$

В уравнении (4.42):

- $GM_j$  = гравитационная постоянная Луны ( $j = 2$ ) или Солнца ( $j = 3$ ),
- $GM_{\oplus}$  = гравитационная постоянная Земли,
- $\hat{R}_j, R_j$  = единичный вектор от геоцентра к Луне или Солнцу и расстояние до Луны или Солнца,
- $R_e$  = экваториальный радиус Земли,
- $\hat{r}, r$  = единичный вектор от геоцентра к опорной точке антенна и его расстояние от геоцентра,
- $h_2, l_2$  = принятое значение числа Лява и числа Шида степени 2.

Для более высокой точности вычислений выполняется исправление чисел Лява и Шида: учитывается их зависимость от широты, т.е. к значению  $h^{(0)}$  добавляется член  $h^{(2)}[(3/2)\sin^2\phi - (1/2)]$ , где  $h^{(2)} = -0.0006$ . Аналогично к числу  $l_2$  добавляется широтный член с коэффициентом  $l^{(2)} = 0.0002$ , что приводит к дополнительному смещению точки в касательной плоскости. Учет зависимости чисел от широты приводит к суммарному смещению, не превышающему 0,4 мм в радиальном и 0,2 мм в трансверсальном направлении.

Вычисление смещения точки вследствие приливов степени 3 выполняется с использованием чисел  $h_3$  и  $l_3$ :

$$\Delta\vec{r} = \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j R_e^5}{GM_\oplus R_j^4} \left\{ h_3 \hat{r} \left( \frac{5}{2} (\hat{R}_j \cdot \hat{r})^3 - \frac{3}{2} (\hat{R}_j \cdot \hat{r}) \right) + l_3 \left( \frac{15}{2} (\hat{R}_j \cdot \hat{r})^2 - \frac{3}{2} \right) [\hat{R}_j - (\hat{R}_j \cdot \hat{r}) \hat{r}] \right\}. \quad (4.43)$$

Здесь учитывается только вклад Луны, поскольку вклад Солнца пренебрежимо мал. Радиальное смещение из-за приливов степени 3 может достигать 1,7 мм, тогда как трансверсальное смещение всего 0,2 мм.

Полная схема вычислений приливного смещения опорной точки антенны показана в таблице.

---

Поправки к положению опорной точки антенны вследствие твердотельных приливов

---

**Этап 1:** Поправки вычисляются во временной области

в фазе	для степени 2 и 3 . для степени 2 см. (4.42)	Значения чисел $h_2 \rightarrow h(\phi) = h^{(0)} + h^{(2)}[(3\sin^2\phi - 1)/2]$ $l_2 \rightarrow l(\phi) = l^{(0)} + l^{(2)}[(3\sin^2\phi - 1)/2]$ $h^{(0)} = 0.6078, h^{(2)} = -0.0006;$ $l^{(0)} = 0.0847, l^{(2)} = 0.0002$
	. для степени 3 см. (4.43)	$h_3 = 0.292$ и $l_3 = 0.015$
противо- фазные	только для степени 2 . суточные приливы см. (4.46) . полусуточные приливы см. (4.47)	Значения чисел $h^I = -0.0025$ и $l^I = -0.0007$ $h^I = -0.0022$ и $l^I = -0.0007$
вклад	от широтной зависимости . суточные приливы см. (4.44) . полусуточные приливы см. (4.45)	Значения чисел $l^{(1)} = 0.0012$ $l^{(1)} = 0.0024$

**Этап 2:** Поправки вычисляются в частотной области и добавляются к результатам предыдущего этапа

в фазе для степени 2 . суточные приливы см. (4.48)	$\rightarrow$ Сумма всех компонент (табл. 4.5.1)
---	--

. полусуточные приливы пренебрежимо мал  
 в фазе и противофазе для степени 2  
 . долгопериодические приливы см. (4.49) → Сумма всех компонент (табл. 4.5.1)

Вклад суточных приливов ( $c l^{(1)} = 0.0012$ ):

$$\delta \vec{t} = -l^{(1)} \sin \phi \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j R_e^4}{GM_{\oplus} R_j^3} P_2^1(\sin \Phi_j) [\sin \phi \cos(\lambda - \lambda_j) \hat{n} - \cos 2\phi \sin(\lambda - \lambda_j) \hat{e}]. \quad (4.44)$$

Вклад полусуточных приливов ( $c l^{(1)} = 0.0024$ ):

$$\delta \vec{t} = -\frac{1}{2} l^{(1)} \sin \phi \cos \phi \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j R_e^4}{GM_{\oplus} R_j^3} P_2^2(\sin \Phi_j) [\cos 2(\lambda - \lambda_j) \hat{n} + \sin \phi \sin 2(\lambda - \lambda_j) \hat{e}]. \quad (4.45)$$

Вклад компонент с  $l^{(1)}$  в горизонтальное смещение из-за суточных и полусуточных приливов составляет примерно 0,8 мм и 1.0 мм соответственно.

В следующих уравнениях  $h^I$  и  $l^I$  являются мнимыми компонентами чисел  $h_{2m}^{(0)}$  и  $l_{2m}^{(0)}$ .

Вклад суточных приливов  $\delta r$  в радиальную и  $\delta \vec{t}$  в трансверсальную часть ( $c h^I = -0.0025$ ,  $l^I = -0.0007$ ):

$$\begin{aligned} \delta r &= -\frac{3}{4} h^I \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j R_e^4}{GM_{\oplus} R_j^3} \sin 2\Phi_j \sin 2\phi \sin(\lambda - \lambda_j), \\ \delta \vec{t} &= -\frac{3}{2} l^I \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j R_e^4}{GM_{\oplus} R_j^3} \sin 2\Phi_j [\cos 2\phi \sin(\lambda - \lambda_j) \hat{n} + \sin \phi \cos(\lambda - \lambda_j) \hat{e}]. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Вклад полусуточных приливов ( $c h^I = -0.0022$ ,  $l^I = -0.0007$ ):

$$\begin{aligned} \delta r &= -\frac{3}{4} h^I \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j R_e^4}{GM_{\oplus} R_j^3} \cos^2 \Phi_j \cos^2 \phi \sin 2(\lambda - \lambda_j), \\ \delta \vec{t} &= \frac{3}{4} l^I \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j R_e^4}{GM_{\oplus} R_j^3} \cos^2 \Phi_j [\sin 2\phi \sin 2(\lambda - \lambda_j) \hat{n} - 2 \cos \phi \cos 2(\lambda - \lambda_j) \hat{e}]. \end{aligned} \quad (4.47)$$

На этапе 2 вычисляются поправки из-за частотной зависимости чисел Лява и Шида  $h_{2m}^{(0)}$  и  $l_{2m}^{(0)}$ .

Вклад суточных приливов находится из выражений:

$$\begin{aligned} \delta r &= [\delta R_f^{(ip)} \sin(\theta_f + \lambda) + \delta R_f^{(op)} \cos(\theta_f + \lambda)] \sin 2\phi, \\ \delta \vec{t} &= [\delta T_f^{(ip)} \cos(\theta_f + \lambda) - \delta T_f^{(op)} \sin(\theta_f + \lambda)] \sin \phi \hat{e} \\ &\quad + [\delta T_f^{(ip)} \sin(\theta_f + \lambda) + \delta T_f^{(op)} \cos(\theta_f + \lambda)] \cos 2\phi \hat{n}, \end{aligned} \quad (4.48)$$

где коэффициенты  $\delta R_f^{(ip)}$ ,  $\delta R_f^{(op)}$ ,  $\delta T_f^{(ip)}$ ,  $\delta T_f^{(op)}$  приводятся в таблице 4.5.1.

Таблица 4.5.1. Поправки к числам Лява и Шида из-за частотной зависимости в мм. Значения чисел равны  $h_2 = 0.6078$  и  $l_2 = 0.0847$  для реальных компонент и  $h^I = -0.0025$ ,  $l^I = -0.0007$  для мнимых компонент. Частоты даны в градусах в час.

Прилив	Частота	Число Дудсона	$\tau$	$s$	$h$	$p$	$N'$	$p_s$	$\ell$	$\ell'$	$F$	$D$	$\Omega$	$\delta R_f^{(ip)}$	$\delta R_f^{(op)}$	$\delta T_f^{(ip)}$	$\delta T_f^{(op)}$
Q <sub>1</sub>	13.39866	135,655	1	-2	0	1	0	0	1	0	2	0	2	-0.08	0.00	-0.01	0.01
	13.94083	145,545	1	-1	0	0	-1	0	0	0	2	0	1	-0.10	0.00	0.00	0.00
O <sub>1</sub>	13.94303	145,555	1	-1	0	0	0	0	0	0	2	0	2	-0.51	0.00	-0.02	0.03
NO <sub>1</sub>	14.49669	155,655	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0.06	0.00	0.00	0.00
$\pi_1$	14.91787	162,556	1	1	-3	0	0	1	0	1	2	-2	2	-0.06	0.00	0.00	0.00
P <sub>1</sub>	14.95893	163,555	1	1	-2	0	0	0	0	0	2	-2	2	-1.23	-0.07	0.06	0.01
	15.03886	165,545	1	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	-1	-0.22	0.01	0.01	0.00
K <sub>1</sub>	15.04107	165,555	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12.00	-0.78	-0.67	-0.03
	15.04328	165,565	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1.73	-0.12	-0.10	0.00
$\psi_1$	15.08214	166,554	1	1	1	0	0	-1	0	-1	0	0	0	-0.50	-0.01	0.03	0.00
$\phi_1$	15.12321	167,555	1	1	2	0	0	0	0	0	-2	2	-2	-0.11	0.01	0.01	0.00

Вклад долгопериодических приливов находится из выражений:

$$\begin{aligned} \delta r &= \left( \frac{3}{2} \sin^2 \phi - \frac{1}{2} \right) (\delta R_f^{(ip)} \cos \theta_f + \delta R_f^{(op)} \sin \theta_f), \\ \delta \vec{t} &= (\delta T_f^{(ip)} \cos \theta_f + \delta T_f^{(op)} \sin \theta_f) \sin 2\phi \hat{n}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

Таблица 4.5.1. Поправки к числам Лява и Шида из-за частотной зависимости для зональных приливов в мм. Значения чисел равны  $h = 0.6078$  и  $l = 0.0847$  Частоты даны в градусах в час.

Name	Frequency	Doodson	$\tau$	$s$	$h$	$p$	$N'$	$p_s$	$\ell$	$\ell'$	$F$	$D$	$\Omega$	$\Delta R_f^{(ip)}$	$\Delta R_f^{(op)}$	$\Delta T_f^{(ip)}$	$\Delta T_f^{(op)}$
	0.00221	55,565	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0.47	0.16	0.23	0.07
$S_{sa}$	0.08214	57,555	0	0	2	0	0	0	0	0	-2	2	-2	-0.20	-0.11	-0.12	-0.05
$M_m$	0.54438	65,455	0	1	0	-1	0	0	-1	0	0	0	0	-0.11	-0.09	-0.08	-0.04

$M_f$	1.09804	75,555	0	2	0	0	0	0	0	-2	0	-2	-0.13	-0.15	-0.11	-0.07	
	1.10024	75,565	0	2	0	0	1	0	0	0	-2	0	-1	-0.05	-0.06	-0.05	-0.03

Суммирование вкладов всех приливов определяет вектор  $\Delta \mathbf{r}_{st}$  в системе VEN.

## 4.5.2 Полярный прилив в твердом теле Земли

Центробежный потенциал, вызываемый вращением Земли, описывается выражением

$$V = \frac{1}{2}[r^2|\boldsymbol{\Omega}|^2 - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega})^2],$$

где  $\boldsymbol{\Omega}$  – вектор мгновенной угловой скорости Земли:  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega[m_1 \hat{x} + m_2 \hat{y} + (1 + m_3) \hat{z}]$ . Безразмерные величины  $m_1, m_2$  описывают отклонение мгновенного полюса от среднего,  $m_3$  – от средней угловой скорости вращения  $\Omega$ ,  $\mathbf{r}$  – геоцентрический радиус-вектор и  $r$  расстояние точки.

Пренебрегая вариациями  $m_3$ , считаем, что полярный прилив порождается возмущениями центробежного потенциала:

$$\Delta V(r, \theta, \lambda) = -\frac{\Omega^2 r^2}{2} \sin 2\theta (m_1 \cos \lambda + m_2 \sin \lambda). \quad (4.50)$$

Смещение, вызванное этим потенциалом, равно [20]:

$$S_r = h_2 \frac{\Delta V}{g}, \quad S_\theta = \frac{\ell_2}{g} \partial_\theta \Delta V, \quad S_\lambda = \frac{\ell_2}{g} \frac{1}{\sin \theta} \partial_\lambda \Delta V.$$

Величины  $m_1, m_2$  равны:

$$m_1 = x_p - \bar{x}_p, \quad m_2 = -(y_p - \bar{y}_p),$$

где  $x_p, y_p$  – координаты полюса по данным МСВЗ,  $\bar{x}_p$  и  $\bar{y}_p$  – средние значения координат полюса.

Тогда  $\Delta \mathbf{r}_{pol} = (S_r, -S_\theta, S_\lambda)$  в системе VEN.

## Смещение из-за океанической нагрузки

Смещение выражается в компонентах, положительных по направлению по радиусу (r), к западу (w) и к югу (s) в виде

$$\Delta c = \sum_j A_{cj} \cos(\chi_j(t) - \phi_{cj}), \quad (4.51)$$

где суммирование выполняется по выбранным приливному гармоникам. Амплитуды  $A_{cj}$  и фазы  $\phi_{cj}$  описывают отклик на океаническую нагрузку для конкретного пункта. Аргументы  $\chi_j(t)$ , зависящие от времени  $t$ , для 11 основных приливов – полусуточных  $M_2, S_2, N_2, K_2$ , суточных  $K_1, O_1, P_1, Q_1$  и долгопериодических  $M_f, M_m, S_{sa}$  вычисляются в соответствии с работой [198].

Амплитуды  $A_{cj}$  и фазы  $\phi_{cj}$  приводятся в следующем формате

```
ALGOPARK
$$ Complete Prov PTM PTM
$$ Computed by OLF, H.-G. Scherneck, Onsala Space Observatory 1995
$$ 40104S001 ALGONQUIN, VLBI lon/lat: -78.0727 45.9555
.00534 .00168 .00103 .00053 .00304 .00187 .00100 .00032 .00026 .00014 .00013
.00236 .00057 .00054 .00016 .00042 .00022 .00013 .00006 .00005 .00002 .00003
.00051 .00022 .00012 .00007 .00020 .00009 .00006 .00004 .00003 .00002 .00002
139.9 171.5 124.3 171.9 -5.5 -1.5 -5.3 -4.7 33.7 16.9 5.5
-162.9 -152.0 176.3 -162.8 -93.4 -159.5 -96.4 -177.8 94.3 101.1 9.4
34.2 77.0 40.0 55.6 130.2 -168.6 132.7 158.0 8.8 5.3 3.4
$$
```

и могут быть получены для любого пункта по запросу на сайте <http://froste.oso.chalmers.se/loading/>. Вычисления могут быть выполнены для 18 различных приливных океанических моделей.

Первые три строки показывают амплитуду приливного смещения (в м) в радиальном направлении, к западу и к югу. Следующие три строки дают фазы (в градусах).

Вектор  $\Delta r_{ocn}$  имеет компоненты  $(\Delta c_r, -\Delta c_w, -\Delta c_s)$ .

## Влияние атмосферных нагрузок

Метод вычисления нагрузок изложен в работе [232].

Влияние атмосферной нагрузки на упругую сферическую Землю может быть вычислено с использованием свертки поверхностной нагрузки на сфере радиуса  $R$ , имеющей массу  $m(\theta, \lambda)$  с функциями Грина  $G_1(\psi)$ ,  $G_2(\psi)$ . Последние описывают отклик упругой Земли на точечную нагрузку на ее поверхность. Вертикальные  $u_v$  и горизонтальные  $u_\theta$  смещения из-за точечной нагрузки могут быть записаны в виде [92]:

$$u_v = m(\theta, \lambda) \cdot G_1(\psi) = m(\theta, \lambda) \cdot \frac{M}{R} \sum_{n=0}^{\infty} h'_n P_n(\cos \psi), \quad (4.52)$$

$$u_\theta = m(\theta, \lambda) \cdot G_2(\psi) = m(\theta, \lambda) \cdot \frac{M}{R} \sum_{n=0}^{\infty} l'_n \frac{\partial P_n(\cos \psi)}{\partial \psi}, \quad (4.53)$$

где  $m(\theta, \lambda)$  — масса точечной нагрузки на кошироте  $\theta$  и долготе  $\lambda$ ;  $M, R$  — масса и радиус Земли,  $h'_n, l'_n$  — нагрузочные числа,  $\psi$  — дуга между точкой приложения нагрузки и точкой, в которой измеряется смещение. Масса нагрузки находится из измеренного давления воздуха  $p(\theta, \lambda)$ :

$$m(\theta, \lambda) = \frac{1}{g} \left[ p(\theta, \lambda) - \overline{p(\theta, \lambda)} \right] ds,$$

где  $g$  — ускорение свободного падения,  $\overline{p(\theta, \lambda)}$  — среднее давление в регионе площадью  $ds$  около точки измерения смещения.

Для вычисления полного смещения из-за атмосферной нагрузки необходимо проинтегрировать выражения (4.52) и (4.53) по всей сфере  $S$ :

$$u_v = \frac{M}{R} \iint_S m(\theta, \lambda) \sum_n h'_n P_n(\cos \psi) ds, \quad (4.54)$$

$$u_\theta = \frac{M}{R} \iint_S m(\theta, \lambda) \sum_n l'_n \frac{\partial P_n(\cos \psi)}{\partial \psi} ds \quad (4.55)$$

или

$$u_v = \iint_S m(\theta, \lambda) G_1(\psi) ds,$$

$$u_\theta = \iint_S m(\theta, \lambda) G_2(\psi) ds.$$

Компоненты горизонтального смещения в восточном  $u_e$  и северном  $u_n$  направлениях равны

$$u_e = -u_\theta \sin A, \quad u_n = -u_\theta \cos A, \quad (4.56)$$

где  $A$  — азимут нагрузки от точки измерения смещения.

Смещение каждого телескопа было вычислено на основе глобального поля атмосферного давления на сетке  $5^\circ \times 5^\circ$ . Значения давления получались суммированием коэффициентов разложения по сферическим гармоникам :

$$p(\theta, \lambda) = K \sum_{m=0}^M \sum_{n=m}^{N+J} (a_n^m \cos m\lambda - b_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\cos \theta),$$

где  $K$  — нормирующий коэффициент. Смещение от атмосферной нагрузки вычислялось для модели Земли с океанами, реагирующими на нагрузки по закону обратного барометра [20].

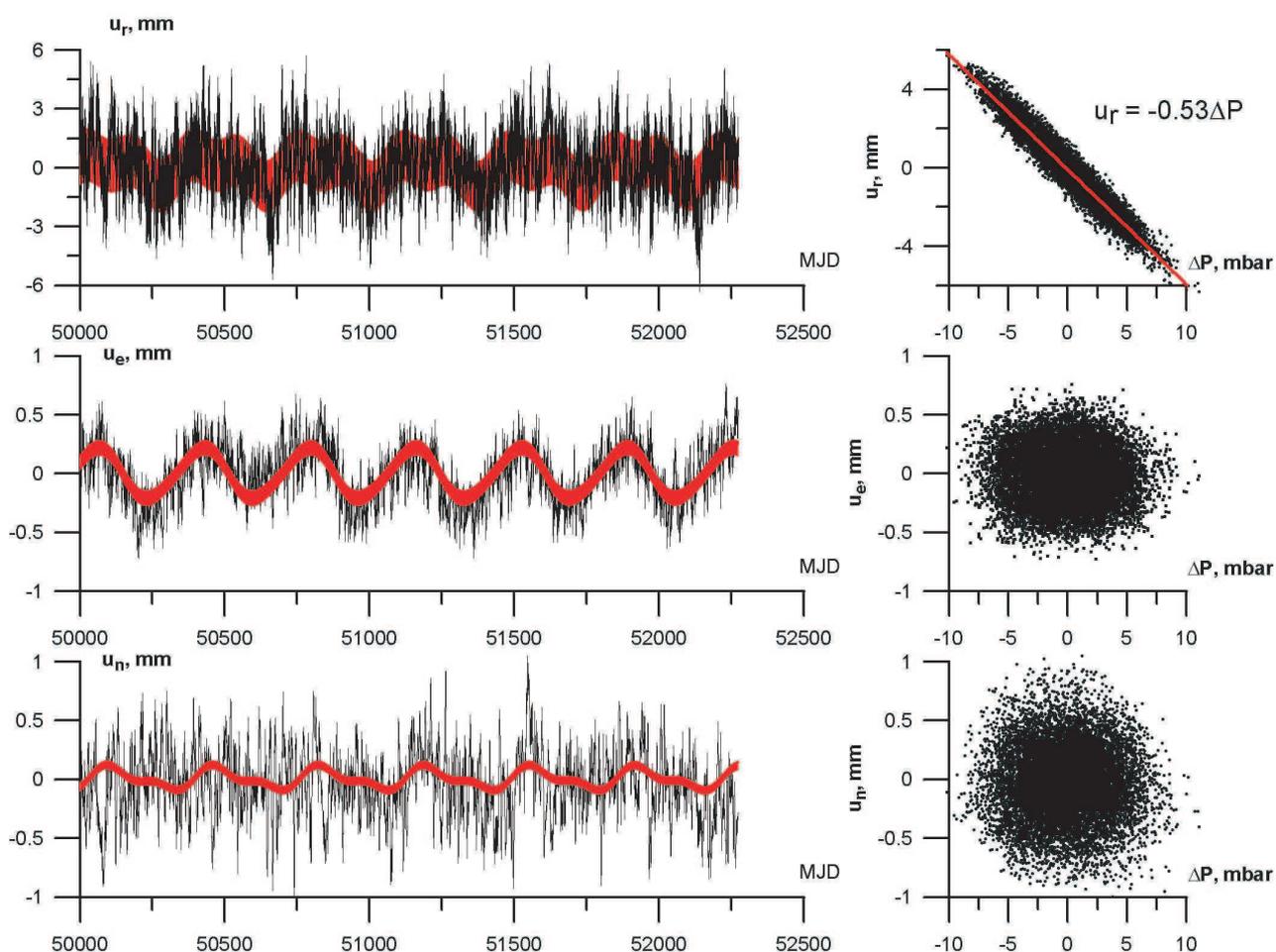


Рис. 4.5: Смещение телескопа Fortaleza

Коэффициенты разложения поля атмосферного давления по сферическим функциям приводятся с шагом 6 часов и были получены с сайта: [ftp://ftp.aer.com/pub/anon\\_collaborations/sba/](ftp://ftp.aer.com/pub/anon_collaborations/sba/) pcoeff.ncer.reanalysis.1975.2004 (около 70 МВ).

В качестве примера показано также смещение телескопа Fortaleza (рис. 4.5) и диаграмма «смещение – изменение давления» (в правой части рисунка).

Максимальные вариации в вертикальном направлении могут достигать  $\pm 1$  см и происходят на разных временных масштабах: от суток до 1 года. Соответствующие им вариации давления относительно среднего имеют величину 10–30 мбар. Горизонтальные смещения имеют величину около 1 мм. Главная гармоника имеет период 1 год, полугодовые смещения характерны для близэкваториальных станций. Должны быть смещения с полусуточным периодом, так как известно [33], что имеется полусуточная термическая атмосферная волна. Однако из данных с временным разрешением 6 часов параметры этой волны получены быть не могут.

Поэтому модель смещения телескопа представлялась в виде суммы постоянного члена и трех гармоник: годовой, полугодовой и суточной (красная линия на рис. 4.5). Затем эта функция вычиталась и находилась линейная регрессия с коэффициентом  $k$  вариаций давления  $\Delta P$  и смещения станции (см. верхний правый график на рис. 4.5) для учета негармонических вариаций давления. Так как постоянный член смещения телескопа близок к нулю и постоянная в модели регрессии тоже, то вертикальное смещение телескопа представлялось суммой гармоник и дополнительного члена. Из рисунков видно также, что горизонтальные смещения не связаны с локальным давлением в области вблизи телескопа. Поэтому горизонтальные смещения представлялось только суммой гармоник:

$$u_r = \sum_{i=1}^3 [(a_r)_i \cos(Arg_i) + (b_r)_i \sin(Arg_i)] + k\Delta P,$$

$$u_{e,n} = \sum_{i=1}^3 [(a_{e,n})_i \cos(Arg_i) + (b_{e,n})_i \sin(Arg_i)],$$

где  $Arg_i = 2\pi/T_i \Delta t$ ,  $T_1 = 1$  год,  $T_2 = 1/2$  года,  $T_3 = 1$  сутки,  $\Delta t = MJD - 44239.0$  (1 января 1980 г).

Коэффициенты  $k$ ,  $(a_r)_i$ ,  $(b_r)_i$ ,  $(a_{e,n})_i$ ,  $(b_{e,n})_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  вычисляются для каждого телескопа, например:

FORTLEZA

0.979	0.236	-0.205	-0.611	-0.280	-0.281	-0.019	0.011	-0.779	2.78
0.307	-0.117	0.017	0.016	0.037	-0.113	0.000	0.000	0.014	0.27
0.136	0.054	0.029	-0.011	0.008	-0.047	0.013	0.000	0.007	0.40

В таблице заданы: в первой строке коэффициенты  $(a_r)_i$ ,  $(b_r)_i$  (6 чисел) в мм, постоянный член смещения телескопа, постоянная в модели регрессии, коэффициент регрессии  $k$  в мм/мбар и среднеквадратичная ошибка.

Таким образом имеем  $\Delta \mathbf{r}_{atm} = (u_r, u_e, u_n)$ .

### Термические смещения опорной точки

Большинство антенн построены по схеме Кассегрена с вторичным фокусом и имеют экваториальную или альт-азимутальную монтировку.

Для таких антенн в работе [168] получена поправка к задержке. Для антенн с экваториальной монтировкой поправка равна

$$\Delta \tau = \frac{1}{c} \cdot \left[ \gamma_f \cdot (T(t - \Delta t_f) - T_0) \cdot (h_f \cdot \sin(\varepsilon)) \right. \\ \left. + \gamma_a \cdot (T(t - \Delta t_a) - T_0) \cdot (h_p \cdot \sin(\varepsilon) + h_v - 1.8 \cdot h_s + h_d \cdot \cos(\delta)) \right],$$

для антенн с альтазимутальной монтировкой:

$$\Delta\tau = \frac{1}{c} \cdot \left[ \gamma_f \cdot (T(t - \Delta t_f) - T_0) \cdot (h_f \cdot \sin(\varepsilon)) + \gamma_a \cdot (T(t - \Delta t_a) - T_0) \cdot (h_p \cdot \sin(\varepsilon) + h_v - 1.8 \cdot h_s) \right].$$

Здесь  $h_f$  — высота бетонного фундамента,  $h_p$  — высота металлической колонны,  $h_v$  — высота вторичного фокуса над колонной,  $h_s$  — высота вторичного рефлектора и  $h_d$  — высота оси склонений над часовой осью;  $\varepsilon$  — угол между главной осью антенны и плоскостью горизонта.

Для интерферометра вклад термических деформаций в задержку равен:

$$\Delta\tau_{baseline} = \Delta\tau_1 - \Delta\tau_2.$$

Для других типов антенн подобные выражения приводятся в работе [169].

## 4.6 Влияние тропосферы и ионосферы

При распространении радиоволны в атмосфере Земли происходит не только изменение направления на источник (т. е. направления вектора  $\mathbf{s}$ ), но и изменение длины пути луча (или, по-другому, появляется дополнительный набег фазы). Он зависит от состояния ионосферы и тропосферы в пунктах наблюдения, которое определяется временем года и суток, локальными условиями. Незнание количества свободных электронов на пути волны в ионосфере и содержания водяного пара в нижних слоях атмосферы приводит к ошибкам вычисления задержки  $\Delta\tau_{atm}$ . Именно эти ошибки ограничивают точность позиционных наблюдений на РСДБ.

Ионосферу образуют верхние слои земной атмосферы, в которой газы частично ионизованы под влиянием ультрафиолетового и рентгеновского солнечного излучения. Ионосфера является электрически нейтральной плазмой, т. е. она содержит равное количество положительных и отрицательных частиц. Число электронов  $N_e$  в кубическом метре (плотность электронов) меняется по высоте сложным образом, достигая максимума на высотах от 250 до 400 км, где  $N_e$  равно примерно  $10^{12} \text{ м}^{-3}$ . Распределение плотности электронов зависит от времени суток, времени года, уровня солнечной активности. Величина  $N_e$  в одно и то же время от точки к точке ионосферы может меняться на порядок.

От плотности свободных электронов зависит частота колебаний плазмы:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi N_e e^2}{m}},$$

где  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона. Частота  $\omega_p$  называется ленгмюровской или плазменной частотой. Для ионосферы она находится в пределах от 3–5 до 10 МГц и равна:

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = 8,978\sqrt{N_e} \text{ [Гц]}.$$

Под действием радиоволны в ионосфере могут возникать как вынужденные колебания электронов и ионов, так и различные виды коллективных собственных колебаний (плазменные колебания). В зависимости от частоты радиоволны  $\omega$  основную роль играют те или другие из них, и, поэтому, электрические свойства ионосферы различны для разных диапазонов радиоволн. Волны с частотами  $\omega \leq \omega_p$  не могут распространяться в ионосфере и отражаются от нее. Волны с частотами  $\omega > \omega_p$  проходят через ионосферу, но фазовые скорости волн сильно зависят от частоты.

Приближенное дисперсионное соотношение для радиоволн в ионосфере можно получить, если воспользоваться определениями показателя преломления  $n_{ph} = c/v_{ph}$  и волнового числа  $k = \omega/v_{ph}$ , где  $v_{ph}$  — фазовая скорость волны,  $c$  — скорость волны в вакууме. Имеем:

$$n_{ph}^2 = \frac{c^2 k^2}{\omega^2}.$$

С другой стороны, показатель преломления  $n = \sqrt{\mu\varepsilon}$ , где  $\mu$  — магнитная проницаемость,  $\varepsilon$  — диэлектрическая постоянная среды. Теория колебания для ионосферы дает следующее выражение для  $n_{ph}$  (при  $\mu = 1$ ):

$$n_{ph}^2 = \varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}.$$

Таким образом, для синусоидальной волны в ионосфере дисперсионное соотношение имеет вид:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2. \quad (4.57)$$

Значит фазовая скорость  $v_{ph}$  в ионосфере

$$v_{ph} = \sqrt{c^2 + \frac{\omega_p^2}{k^2}} \geq c.$$

Дифференцирование (4.57) по  $k$  дает:

$$2\omega \frac{d\omega}{dk} = 2kc^2,$$

или

$$\left(\frac{\omega}{k}\right) \cdot \left(\frac{d\omega}{dk}\right) = v_{ph} \cdot v_{gr} = c^2,$$

так как групповая скорость равна  $d\omega/dk = v_{gr}$ . Значит

$$v_{gr} = c \cdot \frac{c}{v_{ph}} \leq c.$$

Показатель преломления  $n_{ph}$  в ионосфере равен:

$$n_{ph} = \frac{c}{v_{ph}} = \left(1 + \frac{\omega_p^2}{c^2 k^2}\right)^{-1/2} = \left(1 + \frac{f_p^2}{f^2}\right)^{-1/2}. \quad (4.58)$$

Если  $f \gg f_p$ , то, разлагая (4.58) в ряд по малому параметру  $f_p^2/f^2$ , получим:

$$n_{ph} \approx 1 + \frac{c_2}{f^2} + \frac{c_3}{f^3} + \frac{c_4}{f^4} + \dots \quad (4.59)$$

Коэффициенты  $c_2, c_3, c_4$  не зависят от частоты, но зависят от плотности электронов  $N_e$ . Обычно в (4.59) оставляют лишь два члена:

$$n_{ph} = 1 + \frac{c_2}{f^2}, \quad (4.60)$$

причем  $c_2 = -f_p^2/2 = -40,3N_e$  [Гц<sup>2</sup>].

Назовем интеграл от показателя преломления  $n$

$$s = \int_{s_1}^{s_2} n ds,$$

взятый вдоль траектории между точками  $A$  и  $B$  ионосферы, геоцентрические радиусы-векторы которых  $s_1$  и  $s_2$ , оптической длиной пути;  $ds$  — элемент дуги, соединяющей точки  $A$  и  $B$ .

Для фазовой скорости ионосферная рефракция равна:

$$\rho_{ph}^{ion} = \int_{s_1}^{s_2} \left(1 + \frac{c_2}{f^2}\right) ds - \int_{s_1}^{s_2} ds_0. \quad (4.61)$$

Аналогичное выражение можно написать для групповой скорости:

$$\rho_{gr}^{ion} = \int_{s_1}^{s_2} \left(1 - \frac{c_2}{f^2}\right) ds - \int_{s_1}^{s_2} ds_0. \quad (4.62)$$

Таким образом, задержка монохроматического сигнала в ионосфере отрицательна  $\rho_{ph}^{ion} < 0$ , так как его фазовая скорость больше скорости света, а задержка пакета гармонических волн — положительна ( $\rho_{gr}^{ion} > 0$ ).

Чтобы упростить выражения (4.61) и (4.62), предполагают, что  $ds = ds_0$ , то есть интегрирование по кривой заменяют интегрированием по прямой линии, соединяющей точки  $A$  и  $B$ . В этом случае имеем:  $ds_0 = dx / \cos z'$ , где  $dx$  — приращение высоты,  $z'$  — зенитное расстояние источника в точке  $A$ . Используя эту аппроксимацию, получим, что задержка в ионосфере равна:

$$\rho_{ph}^{ion} = \int_{s_1}^{s_2} \sec z' \frac{c_2}{f^2} dx, \quad \rho_{gr}^{ion} = - \int_{s_1}^{s_2} \sec z' \frac{c_2}{f^2} dx. \quad (4.63)$$

При наблюдении источника в зените ( $z' = 0$ ) находим

$$\rho_{ph}^{ion} = -\frac{40,3}{f^2} \text{TEC}, \quad \rho_{gr}^{ion} = \frac{40,3}{f^2} \text{TEC},$$

где

$$\text{TEC} = \int_{s_1}^{s_2} N_e dx \quad (4.64)$$

есть полное содержание электронов (total electron content) в зените. Обычно TEC измеряется в единицах  $10^{16}$  электронов/м<sup>2</sup>.

Вариации TEC зависят от времени суток, времени года и могут достигать порядка величины. Кроме регулярных изменений TEC имеются случайные вариации. Они приводят к нерегулярным изменениям задержки  $\tau_{ion}$ , которые могут достигать  $\sim 3$  нс. Это очень большая величина для РСДБ. Аппроксимация задержки какой-либо моделью позволяет лишь частично учесть эти вариации. Поэтому для исключения ионосферной рефракции применяется особый прием: наблюдения проводятся одновременно на двух частотах, например  $X$  и  $S$  диапазонов ( $f_x = 8,2$  ГГц,  $f_s = 2,2$  ГГц). Тогда задержка сигнала в этих диапазонах равна:

$$\begin{aligned} \tau_x &= \tau_0 + \tau_{ion}^x, \\ \tau_s &= \tau_0 + \tau_{ion}^s, \end{aligned}$$

где  $\tau_0$  — задержка сигнала, не зависящая от ионосферы. Вычитая из одного уравнения другое, получим:

$$\tau_x - \tau_s = \tau_{ion}^x - \tau_{ion}^s = \frac{b}{f_x^2} - \frac{b}{f_s^2} = \tau_{ion}^x \frac{f_s^2 - f_x^2}{f_s^2}, \quad (4.65)$$

где  $b = 40,3$  ГЕС/с. Задержки  $\tau_x, \tau_s$  определяются при корреляционной обработке магнитных лент. Тогда ионосферная задержка в  $X$ -диапазоне может быть найдена из уравнения:

$$\tau_{ion}^x = (\tau_x - \tau_s) \frac{f_s^2}{f_s^2 - f_x^2}. \quad (4.66)$$

Проводя наблюдения на двух далеко разнесенных частотах можно определить ионосферную задержку с ошибкой менее 10 пкс.

Влияние нейтральной атмосферы (т. е. неионизованной части атмосферы) на распространение радиоволн приводит к тропосферной рефракции и задержке сигнала. Нейтральная атмосфера является недисперсионной средой для радиоволн с частотой до 15 ГГц, и, следовательно, распространение волн не зависит от частоты, если частота наблюдений ниже 15 ГГц. Рефракция и задержка сигнала в тропосфере определяется составом газов в ней. Основную неопределенность в вычисление этих величин вносит, главным образом, наше незнание количества водяного пара в столбе тропосферы в направлении источника.

Рассмотрим этот вопрос подробно, так как именно ошибка вычисления задержки в тропосфере ограничивает точность современных систем, таких как РСДБ и GPS/ГЛОНАСС [22]. Наблюдения на этих системах проводятся в сантиметровом и дециметровом диапазонах и часто на больших зенитных углах.

По определению оптическая длина пути между точками  $O$  и  $B$  равна интегралу

$$D = \int_O^B n ds,$$

вычисляемому вдоль траектории распространения света, где  $n$  — показатель преломления среды на участке  $ds$ . Будем считать, что в точке  $O$  находится наблюдатель, а в точке  $B$  — источник. Пусть  $\mathbf{R}_O$  и  $\mathbf{R}_B$  — геоцентрические радиусы-векторы, проведенные в точки  $O$  и  $B$ , соответственно.

Разность оптической длины пути и расстояния между точками  $O$  и  $B$  по прямой линии равна:

$$\Delta D = D - |\mathbf{R}_O - \mathbf{R}_B|,$$

которую обычно представляют в виде двух слагаемых:

$$\Delta D = \int_O^B (n - 1) ds + \int_O^B ds - |\mathbf{R}_O - \mathbf{R}_B|.$$

Введем обозначения:

$$\delta D = \int_0^B (n - 1) ds; \quad \delta l = \int_0^B ds - |\mathbf{R}_O - \mathbf{R}_B|.$$

Значит  $\Delta D = \delta D + \delta l$ . Величина  $\delta D$  определяется отличием скорости света  $V$  в среде от скорости в вакууме  $c$ , так как  $n = c/V$ , а  $\delta l$  — кривизной траектории распространения света. В атмосфере Земли величина  $\delta l$  значительно меньше  $\delta D$ , и далее мы ее учитывать не будем.

Набег  $\delta D$  обычно представляют в виде:

$$\delta D = Z_d F_d(z) + Z_w F_w(z), \quad (4.67)$$

где  $F_d(z)$  и  $F_w(z)$  — так называемые картирующие функции для «сухой» (точнее, гидростатической компоненты) и «влажной» составляющей атмосферы,  $z$  — зенитное расстояние источника.

В настоящее время при обработке РСДБ и GPS наблюдений используются различные картирующие функции, например, функции Ниелла (NMF) [167], Венские функции [49]. Они зависят от множества параметров: давления, плотности, влажности воздуха, широты и высоты антенны и т. д. и обычно представляются в виде:

$$F_{d,w}(z) = \frac{1 + \frac{A_{d,w}}{1 + B_{d,w}}}{\cos z + \frac{A_{d,w}}{\operatorname{ctg} z + B_{d,w}}},$$

где  $A_{d,w}, B_{d,w}$  — коэффициенты для учета сухой ( $d$ ) и влажной ( $w$ ) компонент воздуха. Очевидно, что при  $z = 0^\circ$   $F_{d,w}(0) = 1$ . Как показывают наблюдения РСДБ и GPS, ни одна из используемых функций не дает необходимой точности для вычисления задержки ( $\sim 1$  пкс). Поэтому часто «влажная» задержка является одним из неизвестных параметров и оценивается из наблюдений.

Считается, что вклад «гидростатической» составляющей атмосферы учитывается точно [80, 193]:

$$Z_d = \frac{0,0222768 p_0}{1 - 0,00266 \cos 2\varphi - 0,00000028 h}, \quad (4.68)$$

где  $\varphi$  — геодезическая широта,  $p_0$  — давление в миллибарах в точке наблюдения,  $h$  — высота точки  $O$  (наблюдателя) над эллипсоидом в метрах.

Величина фазового набега в зените  $Z_d$  равняется примерно 7 нс (в линейной мере  $\sim 2$  м).

Как показывают наблюдения, моделирование задержки в виде (4.67), т. е. представление атмосферы сферически-симметричными слоями недостаточно точно. Поэтому в работе [159] в выражение (4.67) включены дополнительные члены, учитывающие наклон слоев воздуха:

$$\delta D = Z_d F_d(z) + Z_w F_w(z) + (G_N \cos A + G_E \sin A) F_g(z), \quad (4.69)$$

где  $G_N$  и  $G_E$  — горизонтальные градиенты задержки в направлении на север и запад,  $A$  — азимут источника,  $F_g(z) = 1/(\cos z \cot z + 0.0032)$  — градиентная картирующая функция [71].

Зная  $\delta D$  можно вычислить задержку в тропосфере  $\delta t_{atm} = \delta D/c$ .

#### 4.6.1 Учет структуры источника

Формальная ошибка определения задержки составляет  $\sim 10$  пс при синтезе полосы [185] и использовании систем Mark-III, Mark-III. Однако при уравнивании среднеквадратичная ошибка составляет в настоящее время 30-50 пс.

Следовательно, необходимо значительное улучшение теоретической модели задержки и учета систематических ошибок, которые дают бóльший вклад в задержку, чем ошибки измерения.

К таким ошибкам может привести структура радиоисточников. На субмиллисекундном уровне точности радиоисточники показывают переменность структуры во времени и потому не могут быть идеальными реперными точками, фиксирующими небесную систему координат. Влияние структуры источников впервые изучается в работе [77], подробно влияние структуры источников на астрометрические и геодезические наблюдения изучается в работах [58, 67, 68, 214].

Комплексная функция видности  $V$  протяженного радиоисточника, который наблюдается на интерферометре с вектором базы  $b$ , равна

$$V(\mathbf{b}, f, t) = \int_{\Omega_s} I(\mathbf{s}, f, t) \exp\left(-i \frac{2\pi f}{c} \mathbf{b} \cdot \mathbf{s}\right) d\Omega, \quad (4.70)$$

где  $I(\mathbf{s}, f, t)$  — радиояркость источника, зависящая от направления  $\mathbf{s}$ , частоты  $f$  и времени  $t$ .

Интегрирование проводится по телесному углу  $\Omega_s$ , стягивающему излучающую область. Если  $\mathbf{s}_0$  — единичный вектор в направлении фазового центра источника, то единичный вектор в направлении произвольной

точки источника равен:  $\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + \boldsymbol{\sigma}$ , причем вектор смещения  $\boldsymbol{\sigma}$  лежит в картинной плоскости. Тогда

$$V(\mathbf{b}, f, t) = \exp\left(-i\frac{2\pi f}{c}\mathbf{b} \cdot \mathbf{s}_0\right) \int_{\Omega_s} I(\mathbf{s} + \boldsymbol{\sigma}, f, t) \exp\left(-i\frac{2\pi f}{c}\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right) d\Omega \quad (4.71)$$

или

$$V = A \exp[i(\phi_g + \phi_s)] = A \exp[i\phi_t]. \quad (4.72)$$

Амплитуда функции видности определяется выражением:

$$A = \left| \int_{\Omega_s} I(\mathbf{s} + \boldsymbol{\sigma}, f, t) \exp\left(-i\frac{2\pi f}{c}\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right) d\Omega \right|. \quad (4.73)$$

Значит полная фаза  $\phi_t$  состоит из суммы геометрической фазы  $\phi_g$ , равной

$$\phi_g = -i\frac{2\pi f}{c}\mathbf{b} \cdot \mathbf{s}_0, \quad (4.74)$$

и структурной фазы  $\phi_s$ , зависящей от распределения яркости и равной

$$\phi_s = \arg \left[ \int_{\Omega_s} I(\mathbf{s} + \boldsymbol{\sigma}, f, t) \exp\left(-i\frac{2\pi f}{c}\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}\right) d\Omega \right]. \quad (4.75)$$

Задержка в РСДБ наблюдениях определяется как частная производная фазы интерференционного сигнала по циклической частоте  $\omega = 2\pi f$ :

$$\tau = \frac{\partial \phi_t}{\partial \omega} = \frac{\partial \phi_g}{\partial \omega} + \frac{\partial \phi_s}{\partial \omega} = -\frac{1}{c}\mathbf{b} \cdot \mathbf{s}_0 + \tau_s, \quad (4.76)$$

где первый член представляет собой геометрическую задержку для опорного направления  $\mathbf{s}_0$ , а второй член  $\tau_s$  — дополнительную задержку, которая определяется распределением яркости источника. Таким образом, положение радиоисточника с распределением яркости  $I$ , определяемое методом РСДБ, задается единичным вектором  $\mathbf{s}_0$  в направлении фазового центра источника. Выбор такой точки является определяющим при построении стабильной небесной системы координат.

## 4.7 Вычисление производных задержки по параметрам

После того, как вычислена задержка  $\Delta t'$  (4.38) (в дальнейшем будем называть ее задержкой в вакууме  $\tau_v$ , т.е.  $\tau_v = \Delta t'$ ) можно найти частные производные задержки  $\tau_v$  по параметрам, которые будут уточняться из наблюдений. Эти производные определяют матрицу условных уравнений (4.33).

Задержка в вакууме  $\tau_v$  равна ( $\mathbf{B} = \mathbf{b}'$ ):

$$\tau_v = \frac{1}{1 + \frac{1}{c} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{V}_\oplus + \mathbf{w}_2)} \cdot \left\{ \tau_{grav} - \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{B}}{c} \left[ 1 - (1 + \gamma_{PPN})U - \frac{|\mathbf{V}_\oplus|^2}{2c^2} - \frac{\mathbf{V}_\oplus \cdot \mathbf{w}_2}{c^2} \right] - \frac{\mathbf{V}_\oplus \cdot \mathbf{B}}{c^2} \left( 1 + \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{V}_\oplus}{2c} \right) \right\}.$$

Частота интерференции  $f_v$  в вакууме равна:

$$\begin{aligned} f_v = & \frac{1}{1 + \frac{1}{c} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{V}_\oplus + \mathbf{w}_2)} \left\{ \dot{\tau}_{grav} - \frac{\mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{B}}}{c} \left[ 1 - (1 + \gamma_{PPN})U - \frac{|\mathbf{V}_\oplus|^2}{2c^2} - \frac{\mathbf{V}_\oplus \cdot \mathbf{w}_2}{c^2} \right] - \right. \\ & - \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{B}}{c} \left[ -(1 + \gamma_{PPN})\dot{U} - \frac{\mathbf{V}_\oplus \cdot \dot{\mathbf{V}}_\oplus}{c^2} - \frac{(\dot{\mathbf{V}}_\oplus \cdot \mathbf{w}_2 + \mathbf{V}_\oplus \cdot \dot{\mathbf{w}}_2)}{c^2} \right] - \\ & - \frac{1}{c^2} (\dot{\mathbf{V}}_\oplus \cdot \mathbf{B} + \mathbf{V}_\oplus \cdot \dot{\mathbf{B}}) \left( 1 + \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{V}_\oplus}{2c} \right) - \frac{\mathbf{V}_\oplus \cdot \mathbf{B} \mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{V}}_\oplus}{c^2 \frac{2c}}{2c} \left. \right\} - \\ & - \frac{1}{\left[ 1 + \frac{1}{c} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{V}_\oplus + \mathbf{w}_2) \right]^2} \left\{ \tau_{grav} - \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{B}}{c} \left[ 1 - (1 + \gamma_{PPN})U - \frac{|\mathbf{V}_\oplus|^2}{2c^2} - \frac{\mathbf{V}_\oplus \cdot \mathbf{w}_2}{c^2} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{\mathbf{V}_\oplus \cdot \mathbf{B}}{c^2} \left( 1 + \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{V}_\oplus}{2c} \right) \right\} \frac{1}{c} \mathbf{s} \cdot (\dot{\mathbf{V}}_\oplus + \dot{\mathbf{w}}_2). \end{aligned}$$

Задержка с учетом вклада тропосферы  $\tau_{tr} = \delta t_{atm_2} - \delta t_{atm_1}$  равна:

$$\tau_t = \tau_v + (\delta t_{atm_2} - \delta t_{atm_1}) + \delta t_{atm_1} \frac{\mathbf{k} \cdot (\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1)}{c},$$

а частота интерференции  $f$  равна:

$$f_t = \dot{\tau} + \dot{\tau}_{tr} + \dot{\delta t}_{atm_1} \frac{\mathbf{k} \cdot (\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1)}{c} + \delta t_{atm_1} \frac{\mathbf{k} \cdot (\dot{\mathbf{w}}_2 - \dot{\mathbf{w}}_1)}{c}.$$

Считается, что ход стандартов частоты описывается квадратичным полиномом:

$$\tau_{cl} = C_0 + C_1(t - t_0) + \frac{1}{2}C_2(t - t_0)^2.$$

Вклад хода часов в частоту интерференции равен:

$$f_{cl} = C_1 + C_2(t - t_0).$$

Заранее коэффициенты  $C_0, C_1, C_2$  неизвестны; они являются параметрами, определяемыми из наблюдений. Полные значения задержки и частоты интерференции равны, следовательно,

$$\begin{aligned} \tau_c &= \tau_t + \tau_{cl}, \\ f_c &= f_t + f_{cl}. \end{aligned}$$

### 4.7.1 Вычисление частных производных по координатам радиоисточника

Прямое восхождение  $\alpha$  и склонение  $\delta$  радиоисточника определяют единичный барицентрический радиус-вектор  $\mathbf{k}$ :

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}.$$

Единичный вектор  $\mathbf{s}$  определяется на стандартную эпоху J2000.0. Определяемые поправки к координатам радиоисточника **относятся к эпохе J2000.0**.

Частные производные  $\mathbf{s}$  по  $\alpha$  и  $\delta$  равны:

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \alpha} = \begin{pmatrix} -\cos \delta \sin \alpha \\ \cos \delta \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s_2 \\ s_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \delta} = \begin{pmatrix} -\sin \delta \cos \alpha \\ -\sin \delta \sin \alpha \\ \cos \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-s_3 s_1}{\sqrt{1-s_3^2}} \\ \frac{-s_3 s_2}{\sqrt{1-s_3^2}} \\ \sqrt{1-s_3^2} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, частные производные задержки по координатам радиоисточника равны:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_v}{\partial \alpha} = & \frac{1}{1 + \frac{1}{c} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{V}_\oplus + \mathbf{w}_2)} \left\{ -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \alpha} \cdot \mathbf{B} \left[ 1 - (1 + \gamma_{PPN})U - \frac{|\mathbf{V}_\oplus|^2}{2c^2} - \frac{\mathbf{V}_\oplus \cdot \mathbf{w}_2}{c^2} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{\mathbf{V}_\oplus \cdot \mathbf{B}}{c^2} \cdot \frac{1}{2c} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \alpha} \cdot \mathbf{V}_\oplus \right\} - \frac{\tau_v}{1 + \frac{1}{c} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{V}_\oplus + \mathbf{w}_2)} \cdot \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \alpha} \cdot (\mathbf{V}_\oplus + \mathbf{w}_2). \end{aligned}$$

Аналогично вычисляется производная  $\partial \tau_v / \partial \delta$ : вместо  $\partial \mathbf{s} / \partial \alpha$  надо подставить  $\partial \mathbf{s} / \partial \delta$ .

Производная частоты интерференции по  $\alpha$  равна:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_v}{\partial \alpha} = & \frac{1}{1 + \frac{1}{c} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{V}_\oplus + \mathbf{w}_2)} \left\{ -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \alpha} \cdot \dot{\mathbf{B}} \left[ 1 - (1 + \gamma_{PPN})U - \frac{|\mathbf{V}_\oplus|^2}{2c^2} - \frac{\mathbf{V}_\oplus \cdot \mathbf{w}_2}{c^2} \right] - \right. \\
& - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \alpha} \cdot \mathbf{B} \left[ -(1 + \gamma_{PPN})\dot{U} - \frac{\mathbf{V}_\oplus \cdot \dot{\mathbf{V}}_\oplus}{c^2} - \frac{(\dot{\mathbf{V}}_\oplus \cdot \mathbf{w}_2 + \mathbf{V}_\oplus \cdot \dot{\mathbf{w}}_2)}{c^2} \right] - \\
& - \frac{1}{c^2} (\dot{\mathbf{V}}_\oplus \cdot \mathbf{B} + \mathbf{V}_\oplus \cdot \dot{\mathbf{B}}) \cdot \frac{1}{2c} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \alpha} \cdot \mathbf{V}_\oplus - \frac{\mathbf{V}_\oplus \cdot \mathbf{B}}{c^2} \cdot \frac{1}{2c} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \alpha} \cdot \dot{\mathbf{V}}_\oplus \left. \right\} - \\
& - \frac{1}{\left[ 1 + \frac{1}{c} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{V}_\oplus + \mathbf{w}_2) \right]^2} \left\{ \dot{\tau}_{grav} - \frac{\mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{B}}}{c} \left[ 1 - (1 + \gamma_{PPN})U - \frac{|\mathbf{V}_\oplus|^2}{2c^2} - \frac{\mathbf{V}_\oplus \cdot \mathbf{w}_2}{c^2} \right] - \right. \\
& - \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{B}}{c} \left[ -(1 + \gamma_{PPN})\dot{U} - \frac{\mathbf{V}_\oplus \cdot \dot{\mathbf{V}}_\oplus}{c^2} - \frac{(\dot{\mathbf{V}}_\oplus \cdot \mathbf{w}_2 + \mathbf{V}_\oplus \cdot \dot{\mathbf{w}}_2)}{c^2} \right] - \\
& - \frac{1}{c^2} (\dot{\mathbf{V}}_\oplus \cdot \mathbf{B} + \mathbf{V}_\oplus \cdot \dot{\mathbf{B}}) \left( 1 + \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{V}_\oplus}{2c} \right) - \frac{\mathbf{V}_\oplus \cdot \mathbf{B} \mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{V}}_\oplus}{c^2 \cdot 2c} \left. \right\} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \alpha} \cdot (\mathbf{V}_\oplus + \mathbf{w}_2) - \\
& - \frac{1}{\left[ 1 + \frac{1}{c} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{V}_\oplus + \mathbf{w}_2) \right]^2} \left\{ -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \alpha} \cdot \mathbf{B} \left[ 1 - (1 + \gamma_{PPN})U - \frac{|\mathbf{V}_\oplus|^2}{2c^2} - \frac{\mathbf{V}_\oplus \cdot \mathbf{w}_2}{c^2} \right] - \right. \\
& - \frac{\mathbf{V}_\oplus \cdot \mathbf{B}}{c^2} \cdot \frac{1}{2c} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \alpha} \cdot \mathbf{V}_\oplus \left. \right\} \frac{1}{c} \mathbf{s} \cdot (\dot{\mathbf{V}}_\oplus + \dot{\mathbf{w}}_2) - \\
& - \frac{1}{\left[ 1 + \frac{1}{c} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{V}_\oplus + \mathbf{w}_2) \right]^2} \left\{ \tau_{grav} - \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{B}}{c} \left[ 1 - (1 + \gamma_{PPN})U - \frac{|\mathbf{V}_\oplus|^2}{2c^2} - \frac{\mathbf{V}_\oplus \cdot \mathbf{w}_2}{c^2} \right] - \right. \\
& - \frac{\mathbf{V}_\oplus \cdot \mathbf{B}}{c^2} \left( 1 + \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{V}_\oplus}{2c} \right) \left. \right\} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \alpha} \cdot (\dot{\mathbf{V}}_\oplus + \dot{\mathbf{w}}_2) + \\
& + \frac{2}{\left[ 1 + \frac{1}{c} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{V}_\oplus + \mathbf{w}_2) \right]^3} \left\{ \tau_{grav} - \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{B}}{c} \left[ 1 - (1 + \gamma_{PPN})U - \frac{|\mathbf{V}_\oplus|^2}{2c^2} - \frac{\mathbf{V}_\oplus \cdot \mathbf{w}_2}{c^2} \right] - \right. \\
& - \frac{\mathbf{V}_\oplus \cdot \mathbf{B}}{c^2} \left( 1 + \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{V}_\oplus}{2c} \right) \left. \right\} \frac{1}{c} \mathbf{s} \cdot (\dot{\mathbf{V}}_\oplus + \dot{\mathbf{w}}_2) \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \alpha} \cdot (\mathbf{V}_\oplus + \mathbf{w}_2).
\end{aligned}$$

Аналогично вычисляется производная  $\partial f_v / \partial \delta$ : вместо  $\partial \mathbf{s} / \partial \alpha$  надо подставить  $\partial \mathbf{s} / \partial \delta$ .

Легко вычислить частные производные задержки и частоты интерференции по скорости изменения прямого восхождения  $\dot{\alpha}$  и склонения  $\dot{\delta}$ . Если предполагается линейное движение источника:

$$\alpha = \alpha_0 + \dot{\alpha}(T - T_0),$$

$$\delta = \delta_0 + \dot{\delta}(T - T_0),$$

где  $T_0 = J2000.0$ , то

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \dot{\alpha}} &= \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \alpha} (T - T_0), \\ \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \dot{\delta}} &= \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \delta} (T - T_0),\end{aligned}$$

и вычисление производных выполняется заменой  $\partial \mathbf{s} / \partial \alpha$  на  $\partial \mathbf{s} / \partial \alpha (T - T_0)$  и  $\partial \mathbf{s} / \partial \delta$  на  $\partial \mathbf{s} / \partial \delta (T - T_0)$ .

### 4.7.2 Вычисление частных производных по координатам телескопов

Для вычисления частных производных по координатам телескопов  $x_1, y_1, z_1$  и  $x_2, y_2, z_2$  запишем выражение для базы  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{B} = W(\mathbf{B}_0 + \mathbf{v}(t_1 - T_{tel}) + \Delta \mathbf{B}) = W \mathbf{B}_{cfs},$$

где  $T_{tel}$  — эпоха, на которую определяются координаты телескопов (в настоящее время J2000.0), и вектор базы  $\mathbf{B}_0$ ,  $\mathbf{v}$  — скорости тектонического движения телескопов на эпоху J2000.0,  $\Delta \mathbf{B}$  — изменения длины базы из-за приливных, термических и других возмущений,  $W$  — матрица поворота земной системы координат на эпоху J2000.0  $\mathbf{B}_{cfs}$  — вектор базы в земной системе координат ITRF (Crust Fixed System).

Считается, что вектор базы направлен от телескопа 1 к телескопу 2. Таким образом

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{r}_2(t_1) - \mathbf{r}_1(t_1) = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}.$$

Тогда частные производные задержки по параметру  $\eta$ ,  $\eta = x_1, x_2, y_1, \dots$  равны:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_v}{\partial \eta} &= \frac{1}{1 + \frac{1}{c} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{V}_\oplus + \mathbf{w}_2)} \left\{ -\frac{\mathbf{s}}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \eta} \left[ 1 - (1 + \gamma_{PPN})U - \frac{|\mathbf{V}_\oplus|^2}{2c^2} - \frac{\mathbf{V}_\oplus \cdot \mathbf{w}_2}{c^2} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{c^2} \mathbf{V}_\oplus \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \eta} \left( 1 + \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{V}_\oplus}{2c} \right) \right\}.\end{aligned}$$

Так как

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \eta} = W \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial x_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial y_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и т.д.}$$

то

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_2} = W \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11} \\ W_{21} \\ W_{31} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y_2} = W \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{12} \\ W_{22} \\ W_{32} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z_2} = W \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{13} \\ W_{23} \\ W_{33} \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_1} = W \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -W_{11} \\ -W_{21} \\ -W_{31} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y_1} = W \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -W_{12} \\ -W_{22} \\ -W_{32} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z_1} = \begin{pmatrix} -W_{13} \\ -W_{23} \\ -W_{33} \end{pmatrix},$$

Производная частоты интерференции  $f_v$  по параметру  $\eta$  равна:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_v}{\partial \eta} = & \frac{1}{1 + \frac{1}{c} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{V}_\oplus + \mathbf{w}_2)} \left\{ -\frac{1}{c} \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{B}}}{\partial \eta} \left[ 1 - (1 + \gamma_{PPN})U - \frac{|\mathbf{V}_\oplus|^2}{2c^2} - \frac{\mathbf{V}_\oplus \cdot \mathbf{w}_2}{c^2} \right] - \right. \\ & - \frac{1}{c} \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \eta} \left[ -(1 + \gamma_{PPN})\dot{U} - \frac{\mathbf{V}_\oplus \cdot \dot{\mathbf{V}}_\oplus}{c^2} - \frac{(\dot{\mathbf{V}}_\oplus \cdot \mathbf{w}_2 + \mathbf{V}_\oplus \cdot \dot{\mathbf{w}}_2)}{c^2} \right] - \\ & - \frac{1}{c^2} (\dot{\mathbf{V}}_\oplus \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \eta} + \mathbf{V}_\oplus \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{B}}}{\partial \eta}) \left( 1 + \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{V}_\oplus}{2c} \right) - \frac{1}{c^2} \mathbf{V}_\oplus \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \eta} \frac{\mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{V}}_\oplus}{2c} \left. \right\} - \\ & - \frac{1}{\left[ 1 + \frac{1}{c} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{V}_\oplus + \mathbf{w}_2) \right]^2} \left\{ -\frac{1}{c} \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \eta} \left[ 1 - (1 + \gamma_{PPN})U - \frac{|\mathbf{V}_\oplus|^2}{2c^2} - \frac{\mathbf{V}_\oplus \cdot \mathbf{w}_2}{c^2} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{c^2} \mathbf{V}_\oplus \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \eta} \left( 1 + \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{V}_\oplus}{2c} \right) \right\} \frac{1}{c} \mathbf{s} \cdot (\dot{\mathbf{V}}_\oplus + \dot{\mathbf{w}}_2), \end{aligned}$$

причем

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{B}}}{\partial x_2} = \dot{W} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{W}_{11} \\ \dot{W}_{21} \\ \dot{W}_{31} \end{pmatrix} \text{ и т.д.}$$

Если в качестве параметра  $\eta$  используются компоненты тектонической скорости телескопов  $v_{1x}, v_{1y}, v_{1z}, v_{2x}, v_{2y}, v_{2z}$ , то производные по этим переменным отличаются от производных по координатам лишь множителем  $t_1 - T_{tel}$ .

### 4.7.3 Вычисление частных производных по координатам полюса

Координаты полюса  $x_p, y_p$  определяют матрицу  $YX$  (4.14) или  $R_1(y_p)R_2(x_p)$  и, следовательно, матрицу  $W$  (4.13). Частные производные матрицы  $W$  по  $x_p, y_p$  равны:

$$\frac{\partial W}{\partial x_p} = PNSY \frac{\partial X}{\partial x_p}, \quad \frac{\partial W}{\partial y_p} = PNS \frac{\partial Y}{\partial y_p} X.$$

Тогда

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_p} = \frac{\partial W}{\partial x_p} \mathbf{B}_{cfs}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y_p} = \frac{\partial W}{\partial y_p} \mathbf{B}_{cfs},$$

Частная производная задержки по параметру  $\eta$ ,  $\eta = x_p, y_p$  равна:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_v}{\partial \eta} = & \frac{1}{1 + \frac{1}{c} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{V}_\oplus + \mathbf{w}_2)} \left\{ -\frac{\mathbf{s}}{c} \cdot \frac{\partial W}{\partial \eta} \mathbf{B}_{cfs} \left[ 1 - (1 + \gamma_{PPN})U - \frac{|\mathbf{V}_\oplus|^2}{2c^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\mathbf{V}_\oplus \cdot \mathbf{w}_2}{c^2} \right] - \frac{1}{c^2} \mathbf{V}_\oplus \cdot \frac{\partial W}{\partial \eta} \mathbf{B}_{cfs} \left( 1 + \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{V}_\oplus}{2c} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Производная частоты интерференции  $f_v$  по параметру  $\eta$  равна:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_v}{\partial \eta} = & \frac{1}{1 + \frac{1}{c} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{V}_\oplus + \mathbf{w}_2)} \left\{ -\frac{1}{c} \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{B}}}{\partial \eta} \left[ 1 - (1 + \gamma_{PPN})U - \frac{|\mathbf{V}_\oplus|^2}{2c^2} - \frac{\mathbf{V}_\oplus \cdot \mathbf{w}_2}{c^2} \right] - \right. \\ & - \frac{1}{c} \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \eta} \left[ -(1 + \gamma_{PPN})\dot{U} - \frac{\mathbf{V}_\oplus \cdot \dot{\mathbf{V}}_\oplus}{c^2} - \frac{(\dot{\mathbf{V}}_\oplus \cdot \mathbf{w}_2 + \mathbf{V}_\oplus \cdot \dot{\mathbf{w}}_2)}{c^2} \right] - \\ & - \frac{1}{c^2} (\dot{\mathbf{V}}_\oplus \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \eta} + \mathbf{V}_\oplus \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{B}}}{\partial \eta}) \left( 1 + \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{V}_\oplus}{2c} \right) - \frac{1}{c^2} \mathbf{V}_\oplus \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \eta} \frac{\dot{\mathbf{V}}_\oplus \cdot \mathbf{s}}{2c} \left. \right\} - \\ & - \frac{1}{\left[ 1 + \frac{1}{c} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{V}_\oplus + \mathbf{w}_2) \right]^2} \left\{ -\frac{1}{c} \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \eta} \left[ 1 - (1 + \gamma_{PPN})U - \frac{|\mathbf{V}_\oplus|^2}{2c^2} - \frac{\mathbf{V}_\oplus \cdot \mathbf{w}_2}{c^2} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{c^2} \mathbf{V}_\oplus \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \eta} \left( 1 + \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{V}_\oplus}{2c} \right) \right\} \frac{1}{c} \mathbf{s} \cdot (\dot{\mathbf{V}}_\oplus + \dot{\mathbf{w}}_2), \\ & \frac{\partial \dot{\mathbf{B}}}{\partial \eta} = \frac{\partial \dot{W}}{\partial \eta} \mathbf{B}_{cfs}. \end{aligned}$$

В явном виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{W}}{\partial x_p} = & \frac{dP}{dt} NSY \frac{\partial X}{\partial x_p} + P \frac{dN}{dt} SY \frac{\partial X}{\partial x_p} + PN \frac{dS}{dt} Y \frac{\partial X}{\partial x_p} + PNS \frac{\partial}{\partial x_p} \left( \frac{dYX}{dt} \right), \\ \frac{\partial \dot{W}}{\partial y_p} = & \frac{dP}{dt} NS \frac{\partial Y}{\partial y_p} X + P \frac{dN}{dt} S \frac{\partial Y}{\partial y_p} X + PN \frac{dS}{dt} \frac{\partial Y}{\partial y_p} X + PNS \frac{\partial}{\partial y_p} \left( \frac{dYX}{dt} \right), \end{aligned}$$

Матрицы

$$Y \frac{\partial X}{\partial x_p}, \quad \frac{\partial Y}{\partial y_p} X, \quad \frac{\partial}{\partial x_p} \left( \frac{dYX}{dt} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y_p} \left( \frac{dYX}{dt} \right)$$

вычисляются для априорных значений координат полюса.

#### 4.7.4 Вычисление частных производных по всемирному времени

Частные производные матрицы  $W$  по  $UT1 - TAI$  равны:

$$\frac{\partial W}{\partial(UT1 - TAI)} = PN \frac{\partial S}{\partial(UT1 - TAI)} YX.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial(UT1 - TAI)} &= \frac{\partial W}{\partial(UT1 - TAI)} \mathbf{B}_{cfs}, \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{B}}}{\partial(UT1 - TAI)} &= \frac{\partial \dot{W}}{\partial(UT1 - TAI)} \mathbf{B}_{cfs}. \end{aligned}$$

В явном виде получим, учитывая, что  $S = R_3(-GAST)$ :

$$\frac{\partial S}{\partial(UT1 - TAI)} = \frac{dR_3(-GAST)}{d(UT1 - TAI)} = \frac{dR_3(-GAST)}{dGAST} r,$$

где  $r = dGAST/d(UT1 - TAI)$  — отношение всемирного к звездному времени;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{W}}{\partial(UT1 - TAI)} &= \frac{dP}{dt} N \frac{\partial S}{\partial(UT1 - TAI)} YX + P \frac{dN}{dt} \frac{\partial S}{\partial(UT1 - TAI)} YX + \\ &+ PN \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial S}{\partial(UT1 - TAI)} \right) YX + PN \frac{\partial S}{\partial(UT1 - TAI)} \left( \frac{dYX}{dt} \right). \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial S}{\partial(UT1 - TAI)} \right) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{dR_3(-GAST)}{dGAST} \frac{dGAST}{d(UT1 - TAI)} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{dR_3(-GAST)}{dGAST} \right) r + \frac{dR_3(-GAST)}{dGAST} \frac{dr}{dt}. \end{aligned}$$

Последний член мал, поэтому

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial S}{\partial(UT1 - TAI)} \right) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{dR_3(-GAST)}{dGAST} \right) r = \\ &= \begin{pmatrix} -\cos(GAST) & +\sin(GAST) & 0 \\ -\sin(GAST) & -\cos(GAST) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d(GAST)}{dt} r. \end{aligned}$$

Частная производная задержки и частоты интерференции вычисляются точно по тем же формулам, что и в предыдущем параграфе.

### Вычисление производных по амплитудам суточных и полусуточных гармоник в UT1

Заметим, что

$$UT1-TAI = (UT1-TAI)_{int} + UT1_{oc},$$

где  $UT1-TAI_{int}$  — интерполированные на момент наблюдения значения всемирного времени и

$$UT1_{oc} = \sum_{j=1}^8 (A_j \cos \omega_j t + B_j \sin \omega_j t).$$

Считается, что суточные и полусуточные вариации в UT1 вызываются океаническими течениями и приливами [181, 100]. Главные гармоники с суточными периодами —  $K_1, P_1, O_1, Q_1$ , с полусуточными приливами —  $K_2, S_2, M_2, N_2$ .

Тогда

$$\frac{\partial W}{\partial A_j} = \frac{\partial W}{\partial(UT1 - TAI)} \frac{\partial(UT1 - TAI)}{\partial A_j} = \frac{\partial W}{\partial(UT1 - TAI)} \cos \omega_j t,$$

$$\frac{\partial W}{\partial B_j} = \frac{\partial W}{\partial(UT1 - TAI)} \frac{\partial(UT1 - TAI)}{\partial B_j} = \frac{\partial W}{\partial(UT1 - TAI)} \sin \omega_j t,$$

Далее получим:

$$\frac{\partial \dot{W}}{\partial A_j} = \frac{\partial \dot{W}}{\partial(UT1 - TAI)} \frac{\partial(UT1 - TAI)}{\partial A_j} = \frac{\partial \dot{W}}{\partial(UT1 - TAI)} \cos \omega_j t,$$

$$\frac{\partial \dot{W}}{\partial B_j} = \frac{\partial \dot{W}}{\partial(UT1 - TAI)} \frac{\partial(UT1 - TAI)}{\partial B_j} = \frac{\partial \dot{W}}{\partial(UT1 - TAI)} \sin \omega_j t.$$

### 4.7.5 Вычисление частных производных по нутации в долготе и нутации в наклоне

В соответствии с используемой теорией нутации вычисляются углы  $\Delta\psi$  — нутация в долготе и  $\Delta\varepsilon$  — нутация в наклоне, а также производные матри-

цы нутации по  $\Delta\psi$  и  $\Delta\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial \Delta\psi} &= R_1(-\varepsilon_0) \frac{\partial R_3(\Delta\psi)}{\partial \Delta\psi} R_1(\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon), \\ \frac{\partial N}{\partial \Delta\varepsilon} &= R_1(-\varepsilon_0) R_3(\Delta\psi) \frac{\partial R_1(\varepsilon_0 + \Delta\varepsilon)}{\partial \Delta\varepsilon},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \Delta\psi} \left( \frac{dN}{dt} \right) &= \frac{dR_1(-\varepsilon_0)}{dt} \frac{\partial R_3(\Delta\psi)}{\partial \Delta\psi} R_1(\varepsilon') + R_1(-\varepsilon_0) \frac{\partial}{\partial \Delta\psi} \left( \frac{dR_3(\Delta\psi)}{dt} \right) R_1(\varepsilon') + \\ &+ R_1(-\varepsilon_0) \frac{\partial R_3(\Delta\psi)}{\partial \Delta\psi} \frac{dR_1(\varepsilon')}{dt}, \\ \frac{\partial}{\partial \Delta\varepsilon} \left( \frac{dN}{dt} \right) &= \frac{dR_1(-\varepsilon_0)}{dt} R_3(\Delta\psi) \frac{\partial R_1(\varepsilon')}{\partial \Delta\varepsilon} + R_1(-\varepsilon_0) \frac{dR_3(\Delta\psi)}{dt} \frac{\partial R_1(\varepsilon')}{\partial \Delta\varepsilon} + \\ &+ R_1(-\varepsilon_0) R_3(\Delta\psi) \frac{\partial}{\partial \Delta\varepsilon} \left( \frac{dR_1(\varepsilon')}{dt} \right).\end{aligned}$$

В явном виде имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial \Delta\psi} &= \begin{pmatrix} -\sin \Delta\psi & \cos \Delta\psi \cos(\varepsilon') & \cos \Delta\psi \sin(\varepsilon') \\ -\cos \varepsilon_0 \cos \Delta\psi & -\cos \varepsilon_0 \sin \Delta\psi \cos(\varepsilon') & -\cos \varepsilon_0 \sin \Delta\psi \sin(\varepsilon') \\ -\sin \varepsilon_0 \cos \Delta\psi & -\sin \varepsilon_0 \sin \Delta\psi \cos(\varepsilon') & -\sin \varepsilon_0 \sin \Delta\psi \sin(\varepsilon') \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial N}{\partial \Delta\varepsilon} &= \begin{pmatrix} 0 & -\sin \Delta\psi \sin \varepsilon' & \sin \Delta\psi \cos \varepsilon' \\ 0 & -\cos \varepsilon_0 \cos \Delta\psi \sin \varepsilon' + \sin \varepsilon_0 \cos \varepsilon' & \cos \varepsilon_0 \cos \Delta\psi \cos \varepsilon' + \sin \varepsilon_0 \sin \varepsilon' \\ 0 & -\sin \varepsilon_0 \cos \Delta\psi \sin \varepsilon' - \cos \varepsilon_0 \cos \varepsilon' & \sin \varepsilon_0 \cos \Delta\psi \cos \varepsilon' - \cos \varepsilon_0 \sin \varepsilon' \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Производные вектора базы по  $\Delta\psi$  и  $\Delta\varepsilon$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \Delta\psi} &= \frac{\partial W}{\partial \Delta\psi} \mathbf{B}_{cfs}, & \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \Delta\varepsilon} &= \frac{\partial W}{\partial \Delta\varepsilon} \mathbf{B}_{cfs} \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{B}}}{\partial \Delta\psi} &= \frac{\partial \dot{W}}{\partial \Delta\psi} \mathbf{B}_{cfs}, & \frac{\partial \dot{\mathbf{B}}}{\partial \Delta\varepsilon} &= \frac{\partial \dot{W}}{\partial \Delta\varepsilon} \mathbf{B}_{cfs}.\end{aligned}$$

Производные матрицы  $W$  по переменным  $\Delta\psi$  и  $\Delta\varepsilon$  равны:

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial \Delta\psi} &= P \frac{\partial N}{\partial \Delta\psi} SYX + PN \frac{\partial S}{\partial \Delta\psi} YX, \\ \frac{\partial W}{\partial \Delta\varepsilon} &= P \frac{\partial N}{\partial \Delta\varepsilon} SYX + PN \frac{\partial S}{\partial \Delta\varepsilon} YX.\end{aligned}$$

Производные матрицы  $\dot{W}$  по переменным  $\Delta\psi$  и  $\Delta\varepsilon$  равны:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{W}}{\partial \Delta\psi} = & \frac{dP}{dt} \frac{\partial N}{\partial \Delta\psi} SYX + \frac{dP}{dt} N \frac{\partial S}{\partial \Delta\psi} YX + P \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial N}{\partial \Delta\psi} \right) SYX + \\ & + P \frac{dN}{dt} \frac{\partial S}{\partial \Delta\psi} YX + P \frac{\partial N}{\partial \Delta\psi} \frac{dS}{dt} YX + PN \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial S}{\partial \Delta\psi} \right) YX + \\ & + P \frac{\partial N}{\partial \Delta\psi} S \left( \frac{dYX}{dt} \right) + PN \frac{\partial S}{\partial \Delta\psi} \left( \frac{dYX}{dt} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{W}}{\partial \Delta\varepsilon} = & \frac{dP}{dt} \frac{\partial N}{\partial \Delta\varepsilon} SYX + \frac{dP}{dt} N \frac{\partial S}{\partial \Delta\varepsilon} YX + P \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial N}{\partial \Delta\varepsilon} \right) SYX + \\ & + P \frac{dN}{dt} \frac{\partial S}{\partial \Delta\varepsilon} YX + P \frac{\partial N}{\partial \Delta\varepsilon} \frac{dS}{dt} YX + PN \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial S}{\partial \Delta\varepsilon} \right) YX + \\ & + P \frac{\partial N}{\partial \Delta\varepsilon} S \left( \frac{dYX}{dt} \right) + PN \frac{\partial S}{\partial \Delta\varepsilon} \left( \frac{dYX}{dt} \right). \end{aligned}$$

Так как

$$S = R_3(-GAST) = \begin{pmatrix} \cos(GAST) & -\sin(GAST) & 0 \\ \sin(GAST) & \cos(GAST) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$\frac{\partial S}{\partial \Delta\psi} = \frac{dR_3(-GAST)}{dGAST} \frac{\partial GAST}{\partial \Delta\psi}, \quad \frac{\partial S}{\partial \Delta\varepsilon} = \frac{dR_3(-GAST)}{dGAST} \frac{\partial GAST}{\partial \Delta\varepsilon} = 0.$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial S}{\partial \Delta\psi} \right) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{dR_3(-GAST)}{dGAST} \right) \frac{dGAST}{d\Delta\psi} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial S}{\partial \Delta\varepsilon} \right) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{dR_3(-GAST)}{dGAST} \right) \frac{dGAST}{d\Delta\varepsilon} = 0. \end{aligned}$$

Уравнение равенств определяет **средним** наклоном  $\varepsilon_0$  и GAST не зависит от  $\Delta\varepsilon$  Поэтому

$$\frac{\partial GAST}{\partial \Delta\psi} = \cos \varepsilon_0, \quad \frac{\partial GAST}{\partial \Delta\varepsilon} = 0$$

и

$$\frac{\partial S}{\partial \Delta\varepsilon} = 0.$$

### 4.7.6 Вычисление частных производных по задержке в тропосфере

Задержка в тропосфере вычисляется по формуле (4.69):

$$\delta D = Z_d F_d(z) + Z_w F_w(z) + (G_N \cos A + G_E \sin A) F_g(z).$$

Таким образом, производные задержки по параметрам  $Z_d$ ,  $Z_w$ ,  $G_N$ ,  $G_E$  равны:

$$\frac{\partial \tau_v}{\partial Z_d} = F_d(z), \quad \frac{\partial \tau_v}{\partial Z_w} = F_w(z), \quad \frac{\partial \tau_v}{\partial G_N} = F_g(z) \cos A, \quad \frac{\partial \tau_v}{\partial G_E} = F_g(z) \sin A.$$

Заметим, что при записи условных уравнений (4.33) предполагалось, что поправки к параметрам  $\Delta p_i$  не меняются в течение сеанса наблюдений. Если обрабатываются сеансы IVS-R1 или IVS-R4 продолжительностью 24 часа, то поправки к расчетной влажной задержке в зените  $Z_w$  из-за быстрого изменения метеопараметров зависят от времени, т.е. условные уравнения имеют вид:

$$\tau_o(t) - \tau_c(t) = \sum_j^K \frac{\partial \tau_c}{\partial q_j} \Delta q_j + \sum_i^N \frac{\partial \tau_c}{\partial p_i} \Big|_t \Delta p_i(t). \quad (4.77)$$

При предположении, что поправки  $\Delta p_i(t)$  зависят от времени, систему (4.77) решить невозможно.

Поэтому поступают следующим образом. Параметры можно условно разделить на несколько групп: например, на глобальные, квазипостоянные, стохастические переменные и т.д. [8]. Предполагается, что глобальные параметры — это такие параметры, которые можно считать постоянными в течение нескольких сеансов наблюдений. К таким параметрам можно отнести координаты телескопов, источников, числа Лява. К квазипостоянным можно отнести параметры, которые можно считать постоянными в течение одного сеанса. В частности, в уравнениях (4.77) — это  $K$  параметров  $q_j$ . Сейчас так оцениваются параметры вращения Земли. Поправки к ПВЗ, найденные из сеансов IVS-R1 или IVS-R4, приводятся на середину сеанса.

К стохастическим параметрам можно отнести параметры, быстро меняющиеся в процессе наблюдений. Наиболее важные из них: тропосферная задержка и функция часов.

Как говорилось выше, случайные флуктуации фазы стандартов частоты приводят к двум эффектам: ограничению когерентного накопления (что связано с частотным белым и фликкер-шумом) и медленным дрейфом частоты (что связано с шумом случайных блужданий частоты). В последнем случае мы имеем медленное расхождение часов на двух пунктах, и

этот тренд с достаточной точностью можно аппроксимировать квадратичным полиномом (4.39). Остаточные флуктуации имеют случайный характер и представляют собой случайные отклонения от низкочастотного тренда, что позволяет считать их случайными флуктуациями с нулевым математическим ожиданием.

Тропосферная задержка как следует из (4.69) зависит от метеопараметров: температуры, давления и относительной влажности. В течение суточного сеанса эти параметры могут меняться очень быстро. Поэтому для решения системы (4.77) поправки  $\Delta p_i(t) = \Delta Z_w(t)$  представляются полиномом:

$$\Delta Z_w(t) = \sum_{i=0}^k a_i T_i(\tau),$$

$T_i$  — полиномы Чебышева,  $\tau = [-1, +1]$  — независимый аргумент (нормализованное время):

$$\tau = \frac{1}{t_{fin} - t_{beg}}(2t' - t_{fin} - t_{beg}),$$

$t_{beg}, t_{fin}$  — время начала и конца наблюдений,  $t'$  — текущий момент наблюдения.

Неизвестными, таким образом, являются  $k + 1$  коэффициент  $a_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$ .

#### 4.7.7 Вычисление частных производных по числам Лява

Для вычисления частных производных по числам Лява:  $h^{(0)} = 0.6078$ ,  $h^{(2)} = -0.0006$  и  $l^{(0)} = 0.0847$ ,  $l^{(2)} = 0.0002$  для прилива степени 2;  $h^{(3)} = 0.292$ ,  $l^{(3)} = 0.015$  для прилива степени 3;  $h^I(1) = -0.0025$ ,  $l^I(1) = -0.0007$  для противофазного вклада суточных приливов степени 2;  $h^I(1/2) = -0.0022$ ,  $l^I(1/2) = -0.0007$  для противофазного вклада полусуточных приливов степени 2;  $l^{(1)}(1) = 0.0012$ ,  $l^{(1)}(1/2) = 0.0024$  для вклада суточных и полусуточных приливов из-за зависимости от широты запишем выражение для базы **B**:

$$\mathbf{B} = W\mathbf{B}_{cfs}.$$

Считается, что вектор базы направлен от телескопа 1 к телескопу 2. Тогда

$$\mathbf{B}_{cfs} = \mathbf{r}_2(t_1)_{tect,oc..} - \mathbf{r}_1(t_1)_{tect,oc..} + \Delta\mathbf{r}_2(t_1)_{solid} - \Delta\mathbf{r}_1(t_1)_{solid},$$

где выделены изменения векторов из-за приливов в твердой Земле, так как только они зависят от значений чисел Лява.

Тогда частные производные задержки по параметру  $\eta$ ,  $\eta = h^{(0)}, h^{(2)}, l^{(0)}, l^{(2)}, h^{(3)}, l^{(3)}, h^I(1), l^I(1), h^I(1/2), l^I(1/2), l^{(1)}(1), l^{(1)}(1/2)$  равны:

$$\frac{\partial \tau_v}{\partial \eta} = \frac{1}{1 + \frac{1}{c} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{V}_\oplus + \mathbf{w}_2)} \left\{ -\frac{\mathbf{s}}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \eta} \left[ 1 - (1 + \gamma_{PPN})U - \frac{|\mathbf{V}_\oplus|^2}{2c^2} - \frac{\mathbf{V}_\oplus \cdot \mathbf{w}_2}{c^2} \right] - \frac{1}{c^2} \mathbf{V}_\oplus \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \eta} \left( 1 + \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{V}_\oplus}{2c} \right) \right\}.$$

Так как

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \eta} = W \frac{\partial \Delta \mathbf{B}}{\partial \eta} = W \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \Delta \mathbf{r}_2(t_1)_{solid} - \Delta \mathbf{r}_1(t_1)_{solid} \right).$$

и векторы  $\Delta \mathbf{r}_2(t_1)_{solid}$ ,  $\Delta \mathbf{r}_1(t_1)_{solid}$  вычислены в земной системе координат на эпоху J2000.0, то

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \eta} = \frac{\partial \Delta \mathbf{r}_2(t_1)_{solid}}{\partial \eta} - \frac{\partial \Delta \mathbf{r}_1(t_1)_{solid}}{\partial \eta}.$$

Производная частоты интерференции  $f_v$  по параметру  $\eta$  равна:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_v}{\partial \eta} = & \frac{1}{1 + \frac{1}{c} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{V}_\oplus + \mathbf{w}_2)} \left\{ -\frac{1}{c} \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{B}}}{\partial \eta} \left[ 1 - (1 + \gamma_{PPN})U - \frac{|\mathbf{V}_\oplus|^2}{2c^2} - \frac{\mathbf{V}_\oplus \cdot \mathbf{w}_2}{c^2} \right] - \right. \\ & - \frac{1}{c} \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \eta} \left[ -(1 + \gamma_{PPN})\dot{U} - \frac{\mathbf{V}_\oplus \cdot \dot{\mathbf{V}}_\oplus}{c^2} - \frac{(\dot{\mathbf{V}}_\oplus \cdot \mathbf{w}_2 + \mathbf{V}_\oplus \cdot \dot{\mathbf{w}}_2)}{c^2} \right] - \\ & - \frac{1}{c^2} (\dot{\mathbf{V}}_\oplus \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \eta} + \mathbf{V}_\oplus \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{B}}}{\partial \eta}) \left( 1 + \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{V}_\oplus}{2c} \right) - \frac{1}{c^2} \mathbf{V}_\oplus \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \eta} \frac{\mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{V}}_\oplus}{2c} \left. \right\} - \\ & - \frac{1}{\left[ 1 + \frac{1}{c} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{V}_\oplus + \mathbf{w}_2) \right]^2} \left\{ -\frac{1}{c} \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \eta} \left[ 1 - (1 + \gamma_{PPN})U - \frac{|\mathbf{V}_\oplus|^2}{2c^2} - \frac{\mathbf{V}_\oplus \cdot \mathbf{w}_2}{c^2} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{c^2} \mathbf{V}_\oplus \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \eta} \left( 1 + \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{V}_\oplus}{2c} \right) \right\} \frac{1}{c} \mathbf{s} \cdot (\dot{\mathbf{V}}_\oplus + \dot{\mathbf{w}}_2), \end{aligned}$$

причем

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{B}}}{\partial \eta} = \frac{\partial \dot{\Delta \mathbf{r}}_2(t_1)_{solid}}{\partial \eta} - \frac{\partial \dot{\Delta \mathbf{r}}_1(t_1)_{solid}}{\partial \eta}.$$

### Вычисление производных.

Вектор смещения станции из-за прилива степени 2 равен (обозначения см. стр. 174):

$$\Delta \mathbf{r} = \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j R_e^4}{GM_\oplus R_j^3} \left\{ h_2 \hat{r} \left( \frac{3}{2} (\hat{R}_j \cdot \hat{r})^2 - \frac{1}{2} \right) + 3l_2 (\hat{R}_j \cdot \hat{r}) [\hat{R}_j - (\hat{R}_j \cdot \hat{r}) \hat{r}] \right\}, \quad (4.78)$$

где  $h_2$  заменяется на  $h(\phi) = h^{(0)} + h^{(2)}[(3 \sin^2 \phi - 1)/2]$ , а  $l_2$  на  $l(\phi) = l^{(0)} + l^{(2)}[(3 \sin^2 \phi - 1)/2]$ .

Имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta \mathbf{r}}{\partial h^{(0)}} &= \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j R_e^4}{GM_{\oplus} R_j^3} \left\{ \hat{r} \left( \frac{3}{2} (\hat{R}_j \cdot \hat{r})^2 - \frac{1}{2} \right) \right\}, \\ \frac{\partial \Delta \mathbf{r}}{\partial h^{(2)}} &= \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j R_e^4}{GM_{\oplus} R_j^3} \left\{ \left( \frac{3}{2} \sin^2 \phi - \frac{1}{2} \right) \hat{r} \left( \frac{3}{2} (\hat{R}_j \cdot \hat{r})^2 - \frac{1}{2} \right) \right\}, \\ \frac{\partial \Delta \mathbf{r}}{\partial l^{(0)}} &= \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j R_e^4}{GM_{\oplus} R_j^3} \left\{ 3 (\hat{R}_j \cdot \hat{r}) [\hat{R}_j - (\hat{R}_j \cdot \hat{r}) \hat{r}] \right\}, \\ \frac{\partial \Delta \mathbf{r}}{\partial l^{(2)}} &= \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j R_e^4}{GM_{\oplus} R_j^3} \left\{ 3 \left( \frac{3}{2} \sin^2 \phi - \frac{1}{2} \right) (\hat{R}_j \cdot \hat{r}) [\hat{R}_j - (\hat{R}_j \cdot \hat{r}) \hat{r}] \right\}.\end{aligned}$$

Вектор смещения станции из-за прилива степени 3 равен

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{r} &= \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j R_e^5}{GM_{\oplus} R_j^4} \left\{ h^{(3)} \hat{r} \left( \frac{5}{2} (\hat{R}_j \cdot \hat{r})^3 - \frac{3}{2} (\hat{R}_j \cdot \hat{r}) \right) + \right. \\ &\quad \left. + l^{(3)} \left( \frac{15}{2} (\hat{R}_j \cdot \hat{r})^2 - \frac{3}{2} \right) [\hat{R}_j - (\hat{R}_j \cdot \hat{r}) \hat{r}] \right\}.\end{aligned}\quad (4.79)$$

Производные по числам Лява равны:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta \mathbf{r}}{\partial h^{(3)}} &= \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j R_e^5}{GM_{\oplus} R_j^4} \left\{ \hat{r} \left( \frac{5}{2} (\hat{R}_j \cdot \hat{r})^3 - \frac{3}{2} (\hat{R}_j \cdot \hat{r}) \right) \right\}, \\ \frac{\partial \Delta \mathbf{r}}{\partial l^{(3)}} &= \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j R_e^5}{GM_{\oplus} R_j^4} \left\{ \left( \frac{15}{2} (\hat{R}_j \cdot \hat{r})^2 - \frac{3}{2} \right) [\hat{R}_j - (\hat{R}_j \cdot \hat{r}) \hat{r}] \right\}.\end{aligned}$$

Вектор трансверсального смещения из-за вклада суточных и полусуточных приливов из-за зависимости от широты чисел  $l^{(1)}(1) = 0.0012$ ,  $l^{(1)}(1/2) = 0.0024$ :

вклад в суточной полосе частот :

$$\delta \vec{t} = -l^{(1)} \sin \phi \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j R_e^4}{GM_{\oplus} R_j^3} P_2^1(\sin \Phi_j) [\sin \phi \cos(\lambda - \lambda_j) \hat{n} - \cos 2\phi \sin(\lambda - \lambda_j) \hat{e}].$$

вклад в полусуточной полосе частот:

$$\delta \vec{t} = -\frac{1}{2} l^{(1)} \sin \phi \cos \phi \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j R_e^4}{GM_{\oplus} R_j^3} P_2^2(\sin \Phi_j) [\cos 2(\lambda - \lambda_j) \hat{n} + \sin \phi \sin 2(\lambda - \lambda_j) \hat{e}].$$

Производные равны:

вклад в суточной полосе частот :

$$\frac{\partial \delta \vec{t}}{\partial l^{(1)}(1)} = -\sin \phi \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j R_e^4}{GM_{\oplus} R_j^3} P_2^1(\sin \Phi_j) [\sin \phi \cos(\lambda - \lambda_j) \hat{n} - \cos 2\phi \sin(\lambda - \lambda_j) \hat{e}].$$

вклад в полусуточной полосе частот:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta \vec{t}}{\partial l^{(1)}(1/2)} &= -\frac{1}{2} \sin \phi \cos \phi \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j R_e^4}{GM_{\oplus} R_j^3} P_2^2(\sin \Phi_j) [\cos 2(\lambda - \lambda_j) \hat{n} \\ &+ \sin \phi \sin 2(\lambda - \lambda_j) \hat{e}]. \end{aligned}$$

Так как производные найдены в локальной системе VEN, то сначала вектор должен быть преобразован в геоцентрическую систему, затем на эпоху J2000.0, т.е.

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{B}}}{\partial \eta} = \dot{W} \left( \frac{\partial \Delta \mathbf{r}_2(t_1)_{solid}}{\partial \eta} - \frac{\partial \Delta \mathbf{r}_1(t_1)_{solid}}{\partial \eta} \right) + W \left( \frac{\partial \dot{\Delta} \mathbf{r}_2(t_1)_{solid}}{\partial \eta} - \frac{\partial \dot{\Delta} \mathbf{r}_1(t_1)_{solid}}{\partial \eta} \right).$$

Изменение радиальной и трансверсальной компонент смещения из-за противофазного вклада суточных приливов степени 2 ( $h^I(1) = -0.0025$ ,  $l^I(1) = -0.0007$ ); и противофазного вклада полусуточных приливов степени 2 ( $h^I(1/2) = -0.0022$ ,  $l^I(1/2) = -0.0007$ );

вклад в суточной полосе частот :

$$\delta r = -\frac{3}{4} h^I \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j R_e^4}{GM_{\oplus} R_j^3} \sin 2\Phi_j \sin 2\phi \sin(\lambda - \lambda_j),$$

$$\delta \vec{t} = -\frac{3}{2} l^I \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j R_e^4}{GM_{\oplus} R_j^3} \sin 2\Phi_j [\cos 2\phi \sin(\lambda - \lambda_j) \hat{n} + \sin \phi \cos(\lambda - \lambda_j) \hat{e}].$$

вклад в полусуточной полосе частот:

$$\delta r = -\frac{3}{4}h^I \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j R_e^4}{GM_{\oplus} R_j^3} \cos^2 \Phi_j \cos^2 \phi \sin 2(\lambda - \lambda_j), \quad (15a)$$

$$\delta \vec{t} = \frac{3}{4}l^I \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j R_e^4}{GM_{\oplus} R_j^3} \cos^2 \Phi_j [\sin 2\phi \sin 2(\lambda - \lambda_j) \hat{n} - 2 \cos \phi \cos 2(\lambda - \lambda_j) \hat{e}].$$

Производные равны:

вклад в суточной полосе частот :

$$\frac{\partial \delta r}{\partial h^I(1)} = -\frac{3}{4} \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j R_e^4}{GM_{\oplus} R_j^3} \sin 2\Phi_j \sin 2\phi \sin(\lambda - \lambda_j),$$

$$\frac{\partial \delta \vec{t}}{\partial l^I(1)} = -\frac{3}{2} \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j R_e^4}{GM_{\oplus} R_j^3} \sin 2\Phi_j [\cos 2\phi \sin(\lambda - \lambda_j) \hat{n} + \sin \phi \cos(\lambda - \lambda_j) \hat{e}].$$

вклад в полусуточной полосе частот:

$$\frac{\partial \delta r}{\partial h^I(1/2)} = -\frac{3}{4} \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j R_e^4}{GM_{\oplus} R_j^3} \cos^2 \Phi_j \cos^2 \phi \sin 2(\lambda - \lambda_j),$$

$$\frac{\partial \delta \vec{t}}{\partial l^I(1/2)} = \frac{3}{4} \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j R_e^4}{GM_{\oplus} R_j^3} \cos^2 \Phi_j [\sin 2\phi \sin 2(\lambda - \lambda_j) \hat{n} - 2 \cos \phi \cos 2(\lambda - \lambda_j) \hat{e}].$$

Теперь находим производные скоростей приливных смещений по числам Лява. Для этого надо вычислить скорости. Производная смещения от прилива степени 2 (4.78):

$$\begin{aligned} \dot{\Delta \mathbf{r}} = & \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j R_e^4}{GM_{\oplus} R_j^3} \left( -3 \frac{\dot{R}_j}{R_j} \right) \left\{ h_2 \hat{r} \left( \frac{3}{2} (\hat{R}_j \cdot \hat{r})^2 - \frac{1}{2} \right) + 3l_2 (\hat{R}_j \cdot \hat{r}) [\hat{R}_j - (\hat{R}_j \cdot \hat{r}) \hat{r}] \right\} + \\ & + \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j R_e^4}{GM_{\oplus} R_j^3} \left\{ h_2 \left[ \frac{d\hat{r}}{dt} \left( \frac{3}{2} (\hat{R}_j \cdot \hat{r})^2 - \frac{1}{2} \right) + \hat{r} \cdot 3 (\hat{R}_j \cdot \hat{r}) \frac{d(\hat{R}_j \cdot \hat{r})}{dt} \right] + \right. \\ & \left. + 3l_2 \left( \frac{d(\hat{R}_j \cdot \hat{r})}{dt} [\hat{R}_j - (\hat{R}_j \cdot \hat{r}) \hat{r}] + (\hat{R}_j \cdot \hat{r}) \left[ \frac{d\hat{R}_j}{dt} - \frac{d(\hat{R}_j \cdot \hat{r})}{dt} \cdot \hat{r} - (\hat{R}_j \cdot \hat{r}) \cdot \frac{d\hat{r}}{dt} \right] \right) \right\} \end{aligned}$$

Производная смещения от прилива степени 3 (4.79):

$$\begin{aligned}
\dot{\Delta \mathbf{r}} = & \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j R_e^5}{GM_{\oplus} R_j^4} \left( -4 \frac{\dot{R}_j}{R_j} \right) \left\{ h^{(3)} \hat{r} \left( \frac{5}{2} (\hat{R}_j \cdot \hat{r})^3 - \frac{3}{2} (\hat{R}_j \cdot \hat{r}) \right) + \right. \\
& + l^{(3)} \left( \frac{15}{2} (\hat{R}_j \cdot \hat{r})^2 - \frac{3}{2} \right) [\hat{R}_j - (\hat{R}_j \cdot \hat{r}) \hat{r}] \left. \right\} + \\
& + \sum_{j=2}^3 \frac{GM_j R_e^5}{GM_{\oplus} R_j^4} \left\{ h^{(3)} \left[ \frac{d\hat{r}}{dt} \left( \frac{5}{2} (\hat{R}_j \cdot \hat{r})^3 - \frac{3}{2} (\hat{R}_j \cdot \hat{r}) \right) + \right. \right. \\
& + \hat{r} \left( \frac{15}{2} (\hat{R}_j \cdot \hat{r})^2 - \frac{3}{2} \right) \frac{d(\hat{R}_j \cdot \hat{r})}{dt} \left. \right] + l^{(3)} \left( 15 (\hat{R}_j \cdot \hat{r}) \frac{d(\hat{R}_j \cdot \hat{r})}{dt} \right) [\hat{R}_j - (\hat{R}_j \cdot \hat{r}) \hat{r}] + \\
& \left. + l^{(3)} \left( \frac{15}{2} (\hat{R}_j \cdot \hat{r})^2 - \frac{3}{2} \right) \left[ \frac{d\hat{R}_j}{dt} - \frac{d(\hat{R}_j \cdot \hat{r})}{dt} \cdot \hat{r} - (\hat{R}_j \cdot \hat{r}) \cdot \frac{d\hat{r}}{dt} \right] \right\}
\end{aligned}$$

## 4.8 Структура пакета АРИАДНА

В настоящее время для редукции и анализа астрометрических наблюдений на РСДБ наиболее широко используется пакет программ CALC/SOLVE, разработанный в Годдардовском центре космических исследований [156]. Первая часть пакета CALC используется для вычисления задержки и частных производных задержки по уточняемым параметрам [99]. Вторая часть SOLVE использует выходные данные CALC для решения системы условных уравнений и оценки параметров.

В основе пакета OCCAM лежат программы BVSS (Bonn VLBI Software System), разработанные Х.Шу [203] в начале 80-х годов в университете Бонна для обработки наблюдений на двух телескопах. Позже пакет был переработан [231]: стало возможным проводить обработку наблюдений на нескольких телескопах, для оценки стохастических параметров применяется фильтр Калмана. В последних версиях OCCAM кроме метода наименьших квадратов для оценки параметров можно использовать метод коллокации [212].

Пакет SteelBreeze разработан С.Болотиным [209] в Главной астрономической обсерватории (Киев, Украина).

Пакет MODEST разработан в Лаборатории реактивного движения [207].

Пакет АРИАДНА разработан автором данного учебника на основе реализации языка Фортран, выполненной фирмой Compaq Visual Fortran 6.1 (CVF). Вместе с CVF поставляется библиотека IMSL - математическая и статистическая библиотека фирмы Visual Numerics, Inc. Доступ к процедурам библиотеки IMSL в среде CVF станет возможным, если в программе, вызывающем библиотечную процедуру, выполнить ссылку

```
use dfimsl
```

Для коррелятора АКЦ ФИАН разработана версия пакета АРИАДНА на основе реализации Фортрана фирмы Intel. Пакет Intel Visual Fortran Compiler for Windows стал полноправным преемником известного в мире программирования на языке Фортран пакета Compaq Visual Fortran. Технологии оптимизации компании Intel в сочетании с наработками пакета CVF дали великолепный результат. Версия Intel VF v.10 стала вторым компилятором для языка Фортран, который снабжен полноценной поддержкой технологии 64-битной адресации памяти и технологии многопоточной обработки, а кроме того способен автоматически распараллеливать процессы. Компилятор Intel позволяет уменьшить объем и производительность исполняемого кода на 32- и 64-разрядных платформах Intel.

Блок-схема пакета АРИАДНА представлена на рис. 4.6 и рис. 4.7.

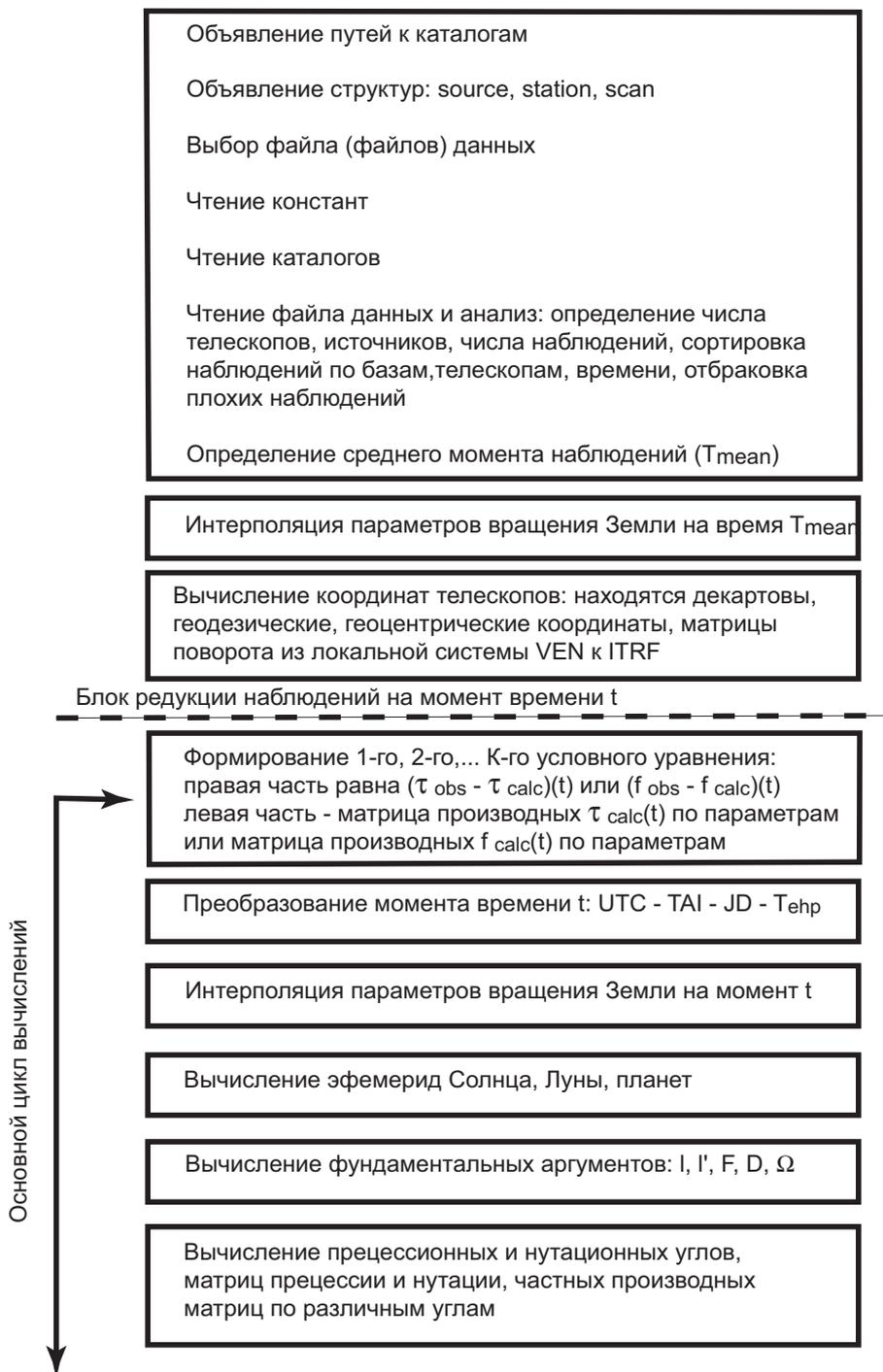


Рис. 4.6: Блок-схема пакета АРИАДНА.



Рис. 4.7: Блок-схема пакета АРИАДНА (продолжение).

При разработке пакета АРИАДНА использован принцип «сверху вниз»: исходная задача разбита на ряд более простых задач — фрагментов (процедур). Связи между процедурами — интерфейс — выполняется только через параметры процедур.

### 4.8.1 Каталоги

Все каталоги помещены в директории «CATALOGS» и имеют расширение *.cat*. В зависимости от версии пакета могут использоваться разное количество каталогов.

К обязательным относятся: каталоги координат и скоростей телескопов (ITRF2005 или рекомендуемый IVS VTRF2008), каталоги радиоисточников, каталог океанических и атмосферных нагрузок.

### Каталог VTRF2008

Координаты и скорости станций определены в системе VTRF2008, которая жестко связана с земной корой, на эпоху J2000.0.

#	VTRF2008 STATION POSITIONS AT EPOCH 2000.0 AND VELOCITIES									
#DOMES NB.	SITE NAME	TECH.	ID.	X/Vx	Y/Vy	Z/Vz	Sigmag	SOLN	DATA_START	DATA_END
#	-----m/m/y-----									
10302M002	TROMSDO	VLBI	7602	2102903.982	721602.650	5958201.369	0.01589 0.00840	0.03870		
10302M002				-0.0189	0.0199	0.0099 0.00184	0.00103	0.00439		
10317S003	NYALES20	VLBI	7331	1202462.712	252734.419	6237766.073	0.00006 0.00007	0.00012		
10317S003				-0.0142	0.0072	0.0111 0.00001	0.00001	0.00002		
10329M001	TRYSILNO	VLBI	7607	2988029.130	655957.094	5578669.205	0.02062 0.00672	0.03750		
10329M001				-0.0098	0.0084	0.0189 0.00266	0.00086	0.00483		
10402S002	ONSALA60	VLBI	7213	3370605.984	711917.528	5349830.771	0.00008 0.00008	0.00012		
10402S002				-0.0140	0.0144	0.0108 0.00001	0.00001	0.00002		
10503S002	METSAHOV	VLBI	7385	2892585.077	1311715.423	5512640.071	0.00348 0.00211	0.00567		
10503S002				-0.0177	0.0123	0.0062 0.00053	0.00032	0.00086		
12337S008	CRIMEA	VLBI	7332	3785231.002	2551207.463	4439796.411	0.00041 0.00028	0.00049		
12337S008				-0.0211	0.0160	0.0107 0.00011	0.00007	0.00012		
12338S003	BADARY	VLBI	7382	-838200.724	3865751.588	4987670.977	0.00360 0.00846	0.01278		
12338S003				-0.0259	-0.0028	-0.0068 0.00044	0.00103	0.00156		
12350S001	SVETLOE	VLBI	7380	2730173.910	1562442.625	5529969.044	0.00031 0.00022	0.00057		
12350S001				-0.0185	0.0120	0.0077 0.00005	0.00003	0.00009		
12351S001	ZELENCHK	VLBI	7381	3451207.781	3060375.208	4391914.919	0.00140 0.00120	0.00187		
12351S001				-0.0165	0.0171	0.0122 0.00019	0.00016	0.00025		
12711S001	MEDICINA	VLBI	7230	4461369.928	919596.878	4449559.236	0.00027 0.00015	0.00030	1	42413.0 50266.0 00:00:00000 96:183:00000
12711S001				-0.0180	0.0188	0.0115 0.00002	0.00002	0.00003		
12711S001	MEDICINA	VLBI	7230	4461369.931	919596.878	4449559.240	0.00012 0.00010	0.00016	2	50266.0 60676.0 96:183:00000 00:00:00000
12711S001				-0.0180	0.0188	0.0115 0.00002	0.00002	0.00003		
12717S001	NOTO	VLBI	7547	4934563.067	1321201.312	3806484.540	0.00021 0.00013	0.00020		
12717S001				-0.0174	0.0176	0.0155 0.00005	0.00003	0.00004		
12734S005	MATERA	VLBI	7243	4641938.713	1393003.074	4133325.586	0.00010 0.00010	0.00014		
12734S005				-0.0187	0.0189	0.0147 0.00002	0.00002	0.00003		
13407S010	DSS65	VLBI	1565	4849336.665	-360488.735	4114748.880	0.00073 0.00026	0.00077	1	42413.0 50554.0 00:00:00000 97:105:00000
13407S010				-0.0072	0.0189	0.0153 0.00010	0.00004	0.00011		
13407S010	DSS65	VLBI	1565	4849336.668	-360488.734	4114748.871	0.00033 0.00015	0.00035	2	50554.0 60676.0 97:105:00000 00:00:00000
13407S010				-0.0072	0.0189	0.0153 0.00010	0.00004	0.00011		
13407S014	DSS65A	VLBI	1567	4849339.669	-360427.747	4114750.665	0.00092 0.00032	0.00098		
13407S014				-0.0072	0.0189	0.0153 0.00010	0.00004	0.00011		
13420S001	YEBES	VLBI	7333	4848780.264	-261702.021	4123035.784	0.00068 0.00020	0.00062		
13420S001				-0.0106	0.0192	0.0121 0.00029	0.00007	0.00026		
14201S004	WETTZELL	VLBI	7224	4075539.836	931735.312	4801629.400	0.00007 0.00009	0.00011		
14201S004				-0.0158	0.0169	0.0104 0.00001	0.00002	0.00002		
14201S100	TIGOWTZL	VLBI	7593	4075572.632	931755.172	4801584.394	0.00098 0.00036	0.00113		
14201S100				-0.0158	0.0169	0.0104 0.00001	0.00002	0.00002		
14209S001	EFLSBERG	VLBI	7203	4033947.420	486990.559	4900430.835	0.00073 0.00028	0.00082	1	42413.0 50358.0 00:00:00000 96:275:00000
14209S001				-0.0135	0.0166	0.0114 0.00009	0.00003	0.00010		
14209S001	EFLSBERG	VLBI	7203	4033947.434	486990.566	4900430.849	0.00038 0.00017	0.00044	2	50358.0 60676.0 96:275:00000 00:00:00000
14209S001				-0.0135	0.0166	0.0114 0.00009	0.00003	0.00010		
21605S009	SESHAN25	VLBI	7227	-2831687.007	4675733.637	3275327.663	0.00019 0.00023	0.00025		
21605S009				-0.0294	-0.0122	-0.0116 0.00003	0.00004	0.00005		
21612S001	URUMQI	VLBI	7330	228310.628	4631922.780	4367064.000	0.00024 0.00049	0.00053		
21612S001				-0.0319	-0.0025	0.0060 0.00005	0.00010	0.00010		
21701S001	KASHIMA	VLBI	1856	-3997892.274	3276581.299	3724118.214	0.00041 0.00032	0.00045		







UXARI	0323+285	3C273B	1226+023	NAQL93	1910+014
UGC02748	0325+023	3C274	1228+126	CYGNUS-A	1957+406
0326+278	0326+277	NGC4552	1233+128	OW-015	2008-068
NRA0140	0333+321	M104	1237-113	2017+743	2017+745
HR1099	0334+004	3C279	1253-055	2023+336	2023+335
СТА26	0336-019	OP326	1315+346	NGC6946	2033+598
NRA0150	0355+508	NGC5077	1316-123	3C418	2037+511
0405+305	0405+304	NGC5141	1322+366	2043+74B	2043+747
3C119	0429+415	CEN-A	1322-427	2043+74A	2043+748
3C120	0430+052	3C286	1328+307	CL4	2048+312
NRA0190	0440-003	1337+80A	1337+807	2118+74A	2118+748
HD32918	0459-753	OQ208	1404+286	2134+00	2134+004
3C138	0518+165	TON202	1425+267	2149-306	2149-307
3C147	0538+498	NGC5635	1426+276	VR422201	2200+420
NGC2110	0549-074	NGC5675	1430+365	3C446	2223-052
MRK003	0609+710	OQ172	1442+101	СТА102	2230+114
NGC2146	0610+783	3C309.1	1458+718	2250+194	2250+190
3C166	0642+214	HD132742	1458-083	3C454.3	2251+158
0718+793	0718+792	1600+43A	1600+432	2252-089	2252-090
UG03927	0733+597	1600+43B	1600+431	NGC7720	2335+267
0734+80A	0734+804	NGC6034	1601+173	2344+09A	2344+092
NGC2484	0755+379	1616+85A	1616+852	2344+092	2345+092
VELA-G	0831-445	CTD93	1607+268		
VELA	0833-450	SIGCRB	1612+339		
4C+32.26	0838+325	NGC6166	1626+396		

### Каталоги океанических и атмосферных нагрузок

Каталоги океанических и атмосферных нагрузок содержат табличные данные об амплитудах и фазах нагрузок для вычисления смещения пункта на произвольный момент времени.

### Каталог параметров вращения Земли

Каталог параметров вращения Земли содержит значения координат полюса, всемирного времени, нутационные углы, которые определяются МСВЗ. В файлах серии С04 (сайт <http://www.iers.org>) эти данные приводятся на 0 часов каждых суток. Временные ряды С04 параметров вращения Земли используются для интерполяции ПВЗ на момент наблюдения. Используется интерполяция по семи точкам. Для повышения точности интерполяции момент наблюдения выбирается ближе к середине 7-суточного интервала.

### Каталог эфемерид DE405/LE405

Для вычисления эфемерид Солнца, Луны, планет используются эфемериды JPL DE405/LE405.

## Дополнительные каталоги

Указанные выше каталоги — это основные каталоги, используемые во всех модификациях пакета АРИАДНА.

Кроме этого могут использоваться дополнительные каталоги:

- EOP\_XX.dat, EOP\_XXint.dat — список файлов-сеансов 24-часовых или 1-часовых (с расширением "int") наблюдений, которые проводились в год XX, для пакетной обработки;
- masterXX.txt, masterXX-int.txt — мастер-файлы с информацией о каждом РСДБ-сеансе; используются только для генерации SINEX-файлов;
- ns-codes.txt — принятые IVS двухбуквенные обозначения телескопов; используются только для генерации SINEX-файлов.

## Файлы данных

В настоящее время центры данных IVS представляют результаты корреляции в виде текстовых ngs-файлов (сайт <http://ivsc.gsfc.nasa.gov/products-data/data.html>). Образец части ngs-файла представлен ниже.

```
DATA IN NGS FORMAT FROM DATABASE 10DEC16XE_V004
Observed delays and rates in card #2, modified errors in card #9
BADARY      -838200.65700  3865751.55100  4987670.93300 AZEL      .00000
MATERA      4641938.77000  1393003.01700  4133325.54600 AZEL      .00000
ZELENCHK    3451207.85100  3060375.18200  4391914.87900 AZEL      .00000
KOKEE       -5543837.62800  -2054567.85900  2387851.93900 AZEL      .51880
WETTZELL    4075539.88300   931735.26100  4801629.37100 AZEL      .00000
TIGOCONC    1492053.97100  -4887960.96900  -3803541.46900 AZEL      .00000
$END
STA26       3 39      30.937790 - 1 46      35.804120
1642+690   16 42       7.848507 68 56      39.756490
3C418      20 38      37.034739 51 19      12.662590
2113+293   21 15      29.413454 29 33      38.366960
0133+476   1 36       58.594807 47 51      29.100070
OJ287      8 54       48.874930 20 6       30.640860
0808+019   8 11       26.707310 1 46       52.220210
0529+483   5 33       15.865782 48 22      52.807920
0800+618   8 5        18.179534 61 44      23.700520
2355-106   23 58      10.882414 -10 20       8.611240
2318+049   23 20      44.856597 5 13       49.952560
0729+259   7 32       56.275262 25 48      38.795120
0955+476   9 58       19.671641 47 25       7.842440
.....
$END
.821299000000D+04          GR PH
$END
BADARY      MATERA      STA26      2010 12 16 18 30  30.000000000          101
-4811738.43343122 .01545 -1420712.7707327770 .03385 0      I      102
.00069 .00000 .00000 .00000 -2.434650683273861 0.      103
```

.00	.0	.00	.0	.00	.0	.00	.0		104
.03980	.07230	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000		105
-16.347	-3.696	901.100	948.104	81.124	86.370	0	0		106
.3217322301		.01252		.0169046896	.01378	0			108
-4811738.43343122		.03423	-1420712.7707327770		.15003	0		I	109
BADARY	ZELENCHK	СТА26	2010 12 16 18 30	30.0000000000					201
-6723972.07107395		.00494	-943277.6534397743		.01085	0		I	202
.00258	.00000	.00000	.00000	-1.532659993143016			0.		203
.00	.0	.00	.0	.00	.0	.00	.0		204
.03980	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000			205
-16.347	2.374	901.100	881.179	81.124	72.356	0	0		206
1.5992731385		.00262		-.0020746496	.00324	0			208
-6723972.07107395		.02731	-943277.6534397743		.13716	0		I	209

В заголовке содержатся список телескопов, принимавших участие в сеансе, список наблюдавшихся источников, частота наблюдений. Затем следует набор строк: в первой указаны телескопы, составляющие базу интерферометра, название источника и момент начала наблюдений; во второй — измеренная задержка и ее ошибка (в нс), частота интерференции и ошибка (в пкс/с); в третьей — коэффициент корреляции и его ошибка, амплитуда интерференции и ошибка, фаза интерференции и ошибка; в четвертой — температура системы и ошибка в пункте 1, те же параметры для пункта 2, затем антенная температура и ошибка для обоих пунктов (если не измерялись, то указываются нули); в пятой — задержка в кабелях для пункта 1 и два (в нс); в шестой — метеопараметры: температура, давление и относительная влажность для пункта 1 и два; в восьмой — задержка в ионосфере для базы и ошибка (в нс), вклад ионосферы в частоту интерференции (в пкс/с); в девятой — измеренная задержка и частота интерференции с модифицированными ошибками.

#### 4.8.2 Модуль «Main»

В модуле «Main» содержатся объявления переменных, которые доступны во всех остальных программных единицах.

- $n\_sta = 20$  — максимальное количество телескопов, принимающих участие в сеансе наблюдений;
- $n\_sou = 260$  — максимальное количество радиоисточников, которые наблюдаются в сеансе;
- $n\_bases = 190 (= n\_sta*(n\_sta-1)/2)$  — максимальное количество баз;
- $n\_time = 2500$  — максимальное количество наблюдений в сеансе (сканов) на каждом телескопе;

- `max_obs = 50000` — максимальное количество записей в `ngs`-файле данных.

При превышении какого-либо из этих параметров выполнение задачи прерывается с указанием изменить его величину.

### 4.8.3 Подпрограммы пакета АРИАДНА

Пакет АРИАДНА включает следующие подпрограммы:

1. `ARIADNA_XX` — основная программа (`XX` означает номер версии), структура которой показана на рис. 4.6 и рис. 4.7; в программе задаются: параметр `i_choice` для выбора одной из теорий нутации (1—IAU1980, 2—IAU2000, 3—ZP2003, 4—GF1999);
2. `CONSTANTS` — подпрограмма, в которой задаются константы;
3. `PREC_CONSTANTS` — подпрограмма, в которой задаются прецессионные константы (выбор зависит от заданной пользователем теории нутации и константы `i_choice`);
4. `READ_CATXX` — выполняется чтение каталогов, файла данных, готовятся списки телескопов, источников (`XX` означает номер версии);
5. `INTERP_EOP` — интерполяция параметров вращения Земли;
6. `INTERP_IERS` — интерполяция параметров вращения Земли по методу, используемому в МСВЗ (используется только для контроля вычислений);
7. `SITE` — вычисляются геоцентрические, геодезические координаты телескопов, матрица поворота от локальной геодезической VEN (Vertical, East, North) системы к геоцентрической системе;
8. `DMETEO1_DT` — метеоданные (температура, давление, влажность) на каждом пункте аппроксимируются полиномами, коэффициенты которых используются в подпрограмме `DMETEO2_DT` для вычисления производных метеопараметров по времени;
9. `DMETEO2_DT` — вычисляются производные метеопараметров по времени;
10. `SOURCE_VEC` — вычисляются компоненты единичного вектора в направлении радиоисточника на эпоху J2000.0;

11. TAITIME — вычисляются атомное ТАИ и земное время ТТ из всемирного координированного времени UTC (момента наблюдения);
12. T\_EPН — вычисляется координатное время  $T_{eph}$ , аргумент в эфемеридах JPL DE405/LE405; время  $T_{eph}$  приблизительно равно TDB;
13. JPLEPH\_405 — вычисляются положения и скорости Солнца, Луны, планет на основе эфемерид DE405/LE405; для Земли вычисляется также ускорение ;
14. FUND\_ARG — вычисляются фундаментальные аргументы, а также число юлианских столетий с эпохи J2000.0, используемое при вычислении нутаций ;
15. IAU1980 — вычисляются нутация в долготе  $\Delta\psi$  и нутация в наклоне  $\Delta\epsilon$  по теории нутации МАС1980 и матрица нутации  $N$  ;
16. МНВ\_2000 — вычисляются нутация в долготе  $\Delta\psi$  и нутация в наклоне  $\Delta\epsilon$  по теории нутации МАС2000 и матрица нутации  $N$ ;
17. ZP2003 — вычисляются нутация в долготе  $\Delta\psi$  и нутация в наклоне  $\Delta\epsilon$  по теории нутации Жарова–Пасынка и матрица нутации  $N$ ;
18. GF1999 — вычисляются нутация в долготе  $\Delta\psi$  и нутация в наклоне  $\Delta\epsilon$  по теории нутации Гетино–Феррандиша и матрица нутации  $N$ ;
19. PREC\_MATRIX — вычисляются прецессионные параметры  $z_A, \theta_A, \zeta_A$ , матрица прецессии  $P$  для преобразования координат на эпоху J2000.0, производная матрицы  $P$  по координатному времени;
20. GASTIME — вычисляется Greenwich Mean Sidereal Time (GMST), Greenwich Apparent Siderial Time (GAST) и их производные по координатному времени;
21. WOBBLE — вычисляется матрица поворота  $YX$  или  $R_1(y_p)R_2(x_p)$  из-за движения полюса ( $x_p, y_p$  — координаты небесного эфемеридного полюса в земной системе координат) и производная матрицы по координатному времени;
22. PNSYX — вычисляется матрица поворота  $W$ , обозначаемая в пакете как  $r2000$ , от геоцентрической небесной (GCRS) к барицентрической небесной системе координат (BCRS) и первые две производных по координатному времени;

23. SITE\_TIDE\_SOLID — вычисляется изменение координат телескопа из-за твердотельных приливов на эпоху J2000.0; приливные вариации координат, вызванные гравитационным воздействием на Землю Луны и Солнца, вычисляются на основе стандартов МСВЗ;
24. SITE\_TIDE\_OC — вычисляется изменение координат телескопа из-за океанических приливов на эпоху J2000.0; приливные вариации координат находятся из разложения прилива на 11 основных волн;
25. POLE\_TIDE — вычисляется изменение координат телескопа из-за полюсного прилива на эпоху J2000.0 на основе стандартов МСВЗ;
26. THERM\_DEF — вычисляется изменение координат телескопа из-за термического расширения;
27. SITE\_ATM20 — вычисляется изменение координат телескопа из-за атмосферной нагрузки;
28. SITE\_INST — вычисляется положение и скорость телескопа в системе GCRS путем сложения поправок за твердотельные и океанические приливы, полюсной прилив, атмосферные нагрузки и термические деформации;
29. ABER\_SOURCE — вычисляется положение источника, исправленное за годичную и суточную аберрацию;
30. MOUNT\_TEL — вычисляются поправки к задержке, которые вызываются антенным выносом (offcet);
31. BASELINE — вычисляются геоцентрический вектор базы на эпоху J2000.0, скорость его изменения, а также ускорение; векторы определяются как разность векторов 2-го и 1-го пунктов;
32. TROP\_DELAY11 — вычисляются полная задержка в тропосфере как сумма «сухой» и «влажной» компонент по модели Ниелла и члена, зависящего от горизонтальных градиентов ;
33. TROP\_BENDING33 — экспериментальная программа для вычисления задержки в тропосфере путем численного интегрирования показателя преломления среды вдоль траектории распространения света;
34. THEOR\_DELAY — вычисляются задержка и частота интерференции для РСДБ согласно стандартам МСВЗ;

35. DER\_STAR — вычисляются частные производные задержки и частоты интерференции по координатам (прямому восхождению и склонению) и скорости радиоисточника;
36. DER\_SITE — вычисляются частные производные по координатам и скорости телескопа;
37. DER\_POLAR — вычисляются частные производные по координатам полюса;
38. DER\_UT1 — вычисляются частные производные по UT1;
39. DER\_NUT — вычисляются частные производные по  $\Delta\psi$  — нутации в долготе и  $\Delta\varepsilon$  — нутации в наклоне;
40. DER\_PREC — вычисляются частные производные по постоянным прецессии: лунно-солнечной и планетной;
41. DER\_LOVE\_NUMBER — вычисляются частные производные по числам Лява;
42. DER\_ATM\_LOAD — вычисляются частные производные по коэффициенту регрессии между давлением и вертикальным смещением;
43. CREATE\_MATR27 — генерируется полная матрица частных производных задержки и частоты интерференции по перечисленным выше параметрам;
44. SAVE\_MATRIX — вспомогательная программа для сохранения полной матрицы частных производных задержки и частоты интерференции;
45. MATRIX\_2BASE31 — программа для копирования полной матрицы частных производных задержки и частоты интерференции и выделения из нее отдельных столбцов, т.е. выбор параметров, которые далее оцениваются по методу наименьших квадратов на **однобазовом интерферометре**; используется для обработки часовых сеансов «интенсивной» программы IVS для определения всемирного времени;
46. MATRIX\_3BASE30 — тестовая версия программы для копирования полной матрицы частных производных задержки и частоты интерференции и выделения из нее отдельных столбцов для обработки часовых сеансов «интенсивной» программы IVS для определения всемирного времени на **трехбазовом интерферометре**;

47. MATRIX\_NBASE30 — программа для копирования полной матрицы частных производных задержки и частоты интерференции и выделения из нее отдельных столбцов, т.е. выбор параметров, которые далее оцениваются по методу наименьших квадратов на **многобазовом интерферометре**; используется для обработки 24-часовых сеансов программы IVS для определения параметров вращения Земли и других параметров; в настоящее время выбор этих параметров выполняется внутри программы;
48. MATRIX\_NBASE31 — расширенная версия предыдущей программы для создания и записи Sinex-файлов;
49. ANALISYS\_CLOCK — тестовая версия программы для анализа поведения часов на каждой станции: поиска скачков; удаление скачков выполняется в программе CLOCK\_JUMP;
50. CLOCK\_JUMP — тестовая версия программы для удаления скачков часов, а также обнаружения и удаления однократных грубых выбросов;
51. ST\_Atmosphere27 — вычисление среднегодовых значений температуры, давления, плотности воздуха в месте расположения телескопов РСДБ на основе модели стандартной атмосферы; используется для вычисления температуры, давления, если таковые отсутствуют в файле наблюдений; в новых версиях планируется использовать более точный алгоритм;
52. UT1R — вычисление поправок к UT1 —  $dUT_{zon}$ , а также к угловой скорости вращения  $\Omega$  из-за зональных приливов; учитываются все 62 гармоники с периодами от пяти суток до 18.6 лет;
53. JULIAN — вычисление юлианской даты по календарной дате на  $0^h$  UTC;
54. DE\_JULIAN — преобразование юлианской даты в календарную;
55. TERMS\_71 — вычисление суточных и полусуточных поправок к UT1,  $x_p, y_p$ ;
56. LSP\_constraint — решение системы условных уравнений  $Ax = B$  с жесткими ограничениями  $Ex = t$ ; используется метод сингулярного разложения;

57. LSProblem — решение системы условных уравнений  $Ax = B$  без ограничений;
58. MNKSVD1 — вычисление псевдообратной матрицы путем разложения по сингулярным числам;
59. NSEC — вычисление разности TAI – UTC;
60. SINEX\_FILE\_2 — создание и копирование SINEX-файлов для однобазового интерферометра;
61. SINEX\_FILE\_N — создание и копирование SINEX-файлов для многобазового интерферометра;
62. XYFigure — программа для вывода графиков;
63. logical function FIND\_FILE — поиск файла в базе данных;
64. GetOpenFileName.f90 — вспомогательная программа для открывания файла данных;
65. CORR\_DATA — вспомогательная программа для перезаписи файла данных и исключения из них одного из телескопов;
66. SAVE\_RESULT — программа для записи результатов вычислений;
67. EOP\_OUT — вспомогательная программа для записи результатов вычислений в формате, требуемом IVS (необходимы master-файлы).

Используется также ряд вспомогательных программ:

1. ARRAY\_2 — вычисление произведения двух матриц вращения  $A \times B$ , каждая размерностью  $3 \times 3$ ;
2. ARRAY\_3 — вычисление произведения трех матриц вращения  $A \times B \times C$ , каждая размерностью  $3 \times 3$ ;
3. ARRAY\_4 — вычисление произведения четырех матриц вращения  $A \times B \times C \times D$ , каждая размерностью  $3 \times 3$ ;
4. CHEBYSHEV — вычисление полиномов Чебышева;
5. R\_123 — вычисление матрицы размерностью  $3 \times 3$  правого вращения  $R_i(\theta)$ ,  $i = 1, 2, 3$  системы координат на угол  $\theta$  относительно  $i$ -той оси;

6. DR\_123 — вычисление частной производной  $\partial/\partial\theta$  матрицы поворота  $R_1(\theta)$  или  $R_2(\theta)$  или  $R_3(\theta)$ ; в частности это может быть производная по координатному времени;
7. D2R\_123 — вычисление второй производной  $\partial^2/\partial\theta^2$  матрицы поворота  $R_1(\theta)$  или  $R_2(\theta)$  или  $R_3(\theta)$ ; в частности это может быть производная по координатному времени;
8. TRANSP — транспонирование матрицы;
9. UNIT\_VEC — вычисление единичного вектора;
10. VECT\_PROD — вычисление векторного произведения векторов  $A$  и  $B$ ;
11. DIF\_2VEC — вычисление разности двух векторов  $A$  и  $B$ , т.е.  $A - B$ ;
12. SUM\_2VEC — вычисление суммы двух векторов  $A$  и  $B$ , т.е.  $A + B$ ;
13. SUM\_2ARRAY — вычисление суммы двух матриц вращения  $A$  и  $B$  размерностью  $3 \times 3$ , т.е.  $A + B$ ;
14. SUM\_3ARRAY — вычисление суммы трех матриц вращения  $A$ ,  $B$ ,  $C$  размерностью  $3 \times 3$ , т.е.  $A + B + C$ ;
15. SUM\_4ARRAY — вычисление суммы четырех матриц вращения  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  размерностью  $3 \times 3$ , т.е.  $A + B + C + D$ ;
16. MUL\_ARR\_VEC — вычисление произведения матрицы вращения  $A$  размерностью  $3 \times 3$  на вектор  $B$  размерностью  $3 \times 1$ ;
17. DOUBLE PRECISION FUNCTION NORM — функция для вычисления евклидовой нормы вектора;
18. DOUBLE PRECISION FUNCTION SCAL\_PROD — функция для вычисления скалярного произведения двух векторов.

## Глава 5

# Решение системы линеаризованных уравнений

### 5.1 Метод наименьших квадратов

Предположим, что имеется система линеаризованных уравнений

$$\mathbf{l} = A\mathbf{x} + \mathbf{r}, \quad (5.1)$$

где  $\mathbf{r}$  — неизвестный  $n$ -мерный вектор невязок с математическим ожиданием  $E\{\mathbf{r}\} = 0$ . Вектор  $\mathbf{x}$  — это неизвестный  $m$ -мерный вектор. Левая часть в (5.1) —  $n$ -мерный вектор  $\mathbf{l}$  известен и в нашем случае представляет собой разницу между измеренной и вычисленной задержкой ( $\tau_o - \tau_c$ ), причем для вычисления  $\tau_c$  использовался априорный вектор  $\mathbf{x}_0$ . Матрица  $A$  — известная  $n \times m$ -матрица (в нашем случае матрица частных производных задержки по параметрам  $x_{0i}, i = 1, \dots, m$ ) (4.33). Считаем, что все ее столбцы линейно независимы, так что ее ранг равен  $m$ :  $\text{rank}(A) = m$ .

Теория решения системы уравнений (5.1) излагается во многих книгах, например [8, 21, 31].

Если  $\mathbf{a} = A\mathbf{x}$ , то вектор невязок равен  $\mathbf{r} = \mathbf{l} - \mathbf{a}$ . Тогда априорная ковариационная матрица данных имеет вид

$$Q_{ll} = E\{\mathbf{l}\mathbf{l}'\} = E\{(\mathbf{a} + \mathbf{r})(\mathbf{a} + \mathbf{r})'\} = E\{\mathbf{r}\mathbf{r}'\} = Q_{rr}, \quad (5.2)$$

если вектор невязок центрирован ( $E\{\mathbf{r}\} = 0$ ). Автоковариационная матрица  $Q_{rr}$  случайных величин  $r_j, j = 1, 2, \dots, n$  является диагональной:

$$Q_{rr} = \text{diag}(\sigma_j^2), \quad (5.3)$$

где  $\sigma_j^2$  — априорные оценки дисперсий данных  $l_j, j = 1, 2, \dots, n$ .

Часто вместо ковариационной матрицы  $Q_{rr}$  используют обратную ей безразмерную весовую матрицу

$$P = P_{rr} = \sigma_0^2 Q_{rr}^{-1}, \quad (5.4)$$

где  $\sigma_0^2$  — дисперсия наблюдений с единичным весом.

Принципом метода наименьших квадратов является минимизация суммы квадратов компонент вектора невязок, т.е.

$$\mathbf{r}'\mathbf{r} = \min, \quad (5.5)$$

причем штрих обозначает операцию транспонирования. Для разноточных наблюдений условие (5.5) имеет вид

$$\mathbf{r}'P\mathbf{r} = \min. \quad (5.6)$$

Необходимо найти такие оценки  $\hat{\mathbf{x}}$  параметров модели (5.1), которые удовлетворяли бы этому условию. Необходимое условие экстремума квадратичной формы приводит к так называемой системе нормальных уравнений:

$$A'PA\hat{\mathbf{x}} = A'P\mathbf{l}. \quad (5.7)$$

Поскольку матрица  $P$  неособенная, ранг матрицы  $A$  равен  $m$ , то  $m \times m$ -матрица  $W = A'PA$  имеет полный ранг  $m$  и тоже является неособенной. Если  $\mathbf{h} = A'P\mathbf{l}$ , то система (5.7) в виде

$$W\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{h} \quad (5.8)$$

имеет решение

$$\hat{\mathbf{x}} = W^{-1}\mathbf{h} = (A'PA)^{-1}A'P\mathbf{l}. \quad (5.9)$$

Оценки невязок равны

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{l} - A\hat{\mathbf{x}}. \quad (5.10)$$

Апостериорная  $m \times m$ -матрица ковариаций оценок  $\hat{\mathbf{x}}$  равна  $D_{zz} = E\{\mathbf{z}\mathbf{z}'\}$ , где  $\mathbf{z} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ . Так как

$$\mathbf{z} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = W^{-1}W(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) = W^{-1}(W\hat{\mathbf{x}} - W\mathbf{x}),$$

то

$$\mathbf{z} = W^{-1}A'P(A\hat{\mathbf{x}} - A\mathbf{x}) = W^{-1}A'P(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}).$$

Найдем вектор  $\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}$ . Подставим в (5.10) решение (5.9):

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{l} - A(A'PA)^{-1}A'P\mathbf{l} = (I - U)\mathbf{l} = (I - U)(A\mathbf{x} + \mathbf{r}) = (I - U)\mathbf{r}, \quad (5.11)$$

где  $U$  есть  $n \times n$  матрица

$$U = A(A'PA)^{-1}A'P. \quad (5.12)$$

Значит,

$$\mathbf{z} = W^{-1}A'PU\mathbf{r}.$$

Матрица  $D_{zz} = E\{\mathbf{z}\mathbf{z}'\}$  равна

$$D_{zz} = W^{-1}A'PU E\{\mathbf{r}\mathbf{r}'\}U'PAW^{-1} = \sigma_0^2 W^{-1} = \sigma_0^2 (A'PA)^{-1} = (A'Q_{rr}^{-1}A)^{-1}. \quad (5.13)$$

Диагональные элементы  $d_{jj}$  матрицы  $D_{zz}$  являются дисперсиями оценок  $\hat{\mathbf{x}}$ :

$$\sigma_j^2 = d_{jj}.$$

Несмещенная оценка единицы веса равна

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{(\hat{\mathbf{r}}'P\hat{\mathbf{r}})}{n - m}. \quad (5.14)$$

Сводка формул для оценивания параметров модели (5.1) *методом наименьших квадратов*:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= (A'PA)^{-1}A'P\mathbf{l}, \\ \hat{\mathbf{r}} &= \mathbf{l} - A\hat{\mathbf{x}}, \\ D_{zz} &= \sigma_0^2 (A'PA)^{-1} = (A'Q_{rr}^{-1}A)^{-1}, \\ \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{(\hat{\mathbf{r}}'P\hat{\mathbf{r}})}{n - m}, \\ P_{rr} &= \sigma_0^2 Q_{rr}^{-1} = \text{diag}\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}\right) = \text{diag}(p_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

Операция обращения матрицы  $W$  (5.8) определена только для квадратных невырожденных матриц. Поэтому получение системы нормальных уравнений является традиционным в методе наименьших квадратов. Однако часто матрица  $A$  системы условных уравнений (5.1), полученных при РСДБ наблюдениях, плохо обусловлена. Поэтому при обращении матрицы  $W$  возможны проблемы.

Альтернативным методом решения системы (5.1) является обращение Мура–Пенроуза (МП-обращение) [21] — обобщение операции обращения матриц на случай вырожденных и неквадратных матриц. Особое свойство МП-обращения — это единственность обращенной матрицы.

Матрица  $A^+$  размера  $n \times m$  называется МП-обратной для вещественной  $m \times n$  матрицы  $A$ , если

$$\begin{aligned} AA^+A &= A, & A^+AA^+ &= A^+ \\ (AA^+)' &= AA^+, & (A^+A)' &= A^+A. \end{aligned}$$

Поскольку для любой матрицы  $A$  МП-обратная матрица  $A^+$  существует и единственна, то решение системы (5.1) всегда существует и это *точное* решение.

Взвешенная сумма квадратов  $O - C$  (в нашем случае разница между измеренной и вычисленной задержкой  $\tau_o - \tau_c$ ) (Weighted square sum of  $O - C$ ):

$$S_{o-c} = \mathbf{l}' P \mathbf{l}.$$

Взвешенная сумма оценок невязок равна (Square sum of residuals)

$$S_{rr} = \hat{\mathbf{r}}' P \hat{\mathbf{r}}.$$

Среднеквадратичная ошибка оценок невязок равна (WRMS of postfit residuals) равна

$$\sigma_{rr} = \frac{\hat{\mathbf{r}}' P \hat{\mathbf{r}}}{\sum_{i=1}^n p_i}.$$

Запишем теперь безразмерную весовую матрицу (5.4) в виде

$$P_{rr} = \sigma_0^2 Q_{rr}^{-1} = \text{diag}\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}\right) = \text{diag}(p_i). \quad (5.15)$$

Для нее можно определить правило извлечения квадратного корня:

$$P_{rr}^{1/2} = \text{diag}(\sqrt{p_i})$$

поскольку

$$P_{rr} = P_{rr}^{1/2} P_{rr}^{1/2}.$$

Умножая уравнение (5.1) на  $P_{rr}^{1/2}$ , получим модель равноточных данных

$$\mathbf{f} = G\mathbf{x} + \mathbf{t}, \quad (5.16)$$

где

$$\mathbf{f} = P_{rr}^{1/2} \mathbf{l}, \quad G = P_{rr}^{1/2} A, \quad \mathbf{t} = P_{rr}^{1/2} \mathbf{r}.$$

Решение уравнения (5.16) равно

$$\hat{\mathbf{x}} = (G'G)^{-1} G' \mathbf{f}.$$

Оценки невязок равны

$$\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{f} - G\hat{\mathbf{x}}.$$

Несмещенная оценка единицы веса равна

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{(\hat{\mathbf{t}}'\hat{\mathbf{t}})}{n - m}. \quad (5.17)$$

Взвешенная сумма квадратов  $O - C$  равна (Weighted square sum of  $O - C$ ):

$$S_{o-c} = \mathbf{f}'\mathbf{f}.$$

Взвешенная сумма оценок невязок равна (Square sum of residuals)

$$S_{rr} = \hat{\mathbf{t}}'\hat{\mathbf{t}}.$$

Среднеквадратичная ошибка оценок невязок равна (WRMS of postfit residuals) равна

$$\sigma_{rr} = \frac{\hat{\mathbf{t}}'\hat{\mathbf{t}}}{\sum_{i=1}^n p_i}.$$

### 5.1.1 Учет уравнений связи («мягкие условия»)

Рассмотрим случай, когда помимо уравнений вида (5.1)

$$\mathbf{l} = A\mathbf{x} + \mathbf{r}$$

параметры должны удовлетворять уравнениям связи

$$\mathbf{t} = E\mathbf{x}, \quad (5.18)$$

где  $\mathbf{t}$  — заданный  $q$ -мерный вектор,  $E$  — матрица коэффициентов размером  $q \times m$ .

Пусть сначала уравнения (5.18) являются приближенными, т.е. их можно представить в виде, аналогичной (5.1):

$$\mathbf{t} = A\mathbf{x} + \mathbf{v}, \quad (5.19)$$

где  $\mathbf{v}$  —  $q$ -мерный вектор невязок этой модели, ковариационная матрица размером  $q \times q$  равна  $Q_{vv}$ . Предполагается, что вектор  $\mathbf{v}$  имеет нормальное распределение с математическим ожиданием  $E\{\mathbf{v}\} = 0$  и не зависит

от вектора невязок  $\mathbf{r}$ . В этом случае условные уравнения (5.19) можно рассматривать как дополнительные уравнения к модели (5.1). Поэтому обе системы можно объединить и обрабатывать совместно. Если

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix}, Q_{uu} = \begin{bmatrix} Q_{rr} & 0 \\ 0 & Q_{vv} \end{bmatrix}, \quad (5.20)$$

то системы (5.1) и (5.19) объединяются в одну систему:

$$\mathbf{f} = G\mathbf{x} + \mathbf{u}. \quad (5.21)$$

Вводя весовую матрицу

$$P_{uu} = \sigma_u^2 Q_{uu}^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_u^2 Q_{rr}^{-1} & 0 \\ 0 & \sigma_u^2 Q_{vv}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{rr} & 0 \\ 0 & P_{vv} \end{bmatrix}, \quad (5.22)$$

получим систему нормальных уравнений:

$$G' P_{uu} G \hat{\mathbf{x}} = G' P_{uu} \mathbf{f} \quad (5.23)$$

или

$$(A' P_{rr} A + E' P_{vv} E) \hat{\mathbf{x}} = (A' P_{rr} \mathbf{1} + E' P_{vv} \mathbf{t}). \quad (5.24)$$

Вводя обозначения

$$W = A' P_{rr} A, R = E' P_{vv} E, \mathbf{h} = A' P_{rr} \mathbf{1}, \mathbf{b} = E' P_{vv} \mathbf{t}, \quad (5.25)$$

систему нормальных уравнений можно записать в виде:

$$(W + R) \hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{h} + \mathbf{b}). \quad (5.26)$$

Оценки параметров равны

$$\hat{\mathbf{x}} = (W + R)^{-1} (\mathbf{h} + \mathbf{b}). \quad (5.27)$$

Ковариационная матрица равна

$$D_{zz} = \hat{\sigma}_u^2 (W + R)^{-1} \quad (5.28)$$

и оценки дисперсии невязок  $\mathbf{u}$  системы (5.21)

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{(\hat{\mathbf{u}}' P_{uu} \hat{\mathbf{u}})}{n + q - m}. \quad (5.29)$$

### 5.1.2 Ограниченные нормальные уравнения (для SINEX файлов)

При формировании SINEX файлов (определение структуры см. на сайте [http://www.iers.org/IERS/EN/Organization/AnalysisCoordinator/SinexFormat/sinex\\_\\_cont.html](http://www.iers.org/IERS/EN/Organization/AnalysisCoordinator/SinexFormat/sinex__cont.html)) необходимо выделить из всех оцениваемых параметров некоторый набор параметров, который затем будет использоваться для комбинированного решения. В частности, при обработке суточного сеанса — это ПВЗ, координаты телескопов, для часовых серий — это UT1.

Соответственно формируется система ограниченных нормальных уравнений (decomposed normal equations) и нормального вектора (decomposed normal vector) для выбранного набора параметров.

Решение этой задачи удобно сформулировать в виде двухгрупповой модели данных вместо уравнения (5.1):

$$\mathbf{l} = A\mathbf{x} + B\mathbf{y} + \mathbf{r}, \quad (5.30)$$

причем набор параметров  $\mathbf{x}$  выводится в SINEX файл, тогда как решение находится в виде комбинации  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ . Вводя блочную матрицу плана  $C = [A \ B]$  и составной вектор  $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , модель можно привести к общему виду (5.1):

$$\mathbf{l} = C\mathbf{z} + \mathbf{r}. \quad (5.31)$$

Будем считать, что векторы параметров  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  состоят из  $m$  и  $n$  компонент соответственно, т.е. составной вектор  $\mathbf{z}$  имеет длину  $m + n$ .

Тогда нормальную систему можно представить как (5.8):

$$W\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{h} \quad (5.32)$$

или в блочном виде:

$$\begin{bmatrix} W_{xx} & W_{xy} \\ W_{yx} & W_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix}, \quad (5.33)$$

где

$$h_x = A'P_{rr}l, \quad h_y = B'P_{rr}l,$$

$$W_{xx} = A'P_{rr}A, \quad W_{xy} = W'_{yx} = A'P_{rr}B, \quad W_{yy} = B'P_{rr}B.$$

Решение (5.33) имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{xx} & W_{xy} \\ W_{yx} & W_{yy} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix}. \quad (5.34)$$

Вводя более простые обозначения:

$$F = W_{xx}, \quad G = W_{yy}, \quad H = W_{xy}, \quad \mathbf{f} = h_x, \quad \mathbf{g} = h_y,$$

решение (5.33) запишем в виде:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F & H \\ H' & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (F - HG^{-1}H')^{-1} & -(F - HG^{-1}H')^{-1}HG^{-1} \\ -(G - H'F^{-1}H)^{-1}H'F^{-1} & (G - H'F^{-1}H)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Таким образом, решение (5.35) может быть представлено как:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= (F - HG^{-1}H')^{-1}(\mathbf{f} - HG^{-1}\mathbf{g}), \\ \hat{\mathbf{y}} &= (G - H'F^{-1}H)^{-1}(\mathbf{g} - H'F^{-1}\mathbf{f}). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Значит, система ограниченных нормальных уравнений (decomposed normal equations) и нормальный вектор (decomposed normal vector) для выбранного набора параметров  $\mathbf{x}$  имеют вид:

$$A_{dec}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{l}_{dec}, \quad (5.37)$$

где

$$A_{dec} = (F - HG^{-1}H'), \quad \mathbf{l}_{dec} = \mathbf{f} - HG^{-1}\mathbf{g}.$$

Ковариационная матрица определяемых параметров равна

$$D_{zz} = \hat{\sigma}_0^2 V_{zz} = \begin{bmatrix} V_{xx} & V_{xy} \\ V_{yx} & V_{yy} \end{bmatrix}.$$

Отсюда апостериорные ковариации определяемых параметров равны

$$\begin{aligned} D_{xx} &= \hat{\sigma}_0^2 V_{xx} = \hat{\sigma}_0^2 (F - HG^{-1}H')^{-1}, \\ D_{xy} &= \hat{\sigma}_0^2 V_{xy} = -D_{xx}HG^{-1}, \end{aligned}$$

т.е. они могут быть использованы для вычисления решения (5.36):

$$\begin{aligned} A_{dec} = (F - HG^{-1}H') &= V_{xx}^{-1} \\ -HG^{-1} &= V_{xx}^{-1}V_{xy}. \end{aligned}$$

### 5.1.3 Учет уравнений связи («жесткие условия»)

Считаем теперь, что параметры удовлетворяют точным уравнениям связи (5.18), т.е. вектор невязок  $\mathbf{v}$  в (5.19) равен нулю ( $\mathbf{v} = 0$ ):

$$\mathbf{t} = E\mathbf{x},$$

где  $\mathbf{t}$  — заданный  $q$ -мерный вектор,  $E$  — матрица коэффициентов размером  $q \times m$ .

В этом случае используется метод неопределенных множителей Лагранжа, который состоит в том, что находится минимум функции Лагранжа:

$$\Phi(\mathbf{x}) = (\mathbf{1} - A\mathbf{x})'P_{rr}(\mathbf{1} - A\mathbf{x}) + 2\mathbf{k}'(E\mathbf{x} - \mathbf{t}), \quad (5.38)$$

где  $\mathbf{k}$  — вектор неопределенных множителей размером  $q$ . Найдем полный дифференциал  $\Phi$  и приравняем его нулю:

$$d\Phi = -2d\mathbf{x}A'P_{rr}(\mathbf{1} - A\mathbf{x}) + 2d\mathbf{x}E'\mathbf{k}|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} = 0,$$

откуда с учетом (5.8) находим

$$W\hat{\mathbf{x}} + E'\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{h}. \quad (5.39)$$

Присоединяя к (5.39) условное уравнение (5.18), получим блочную систему уравнений:

$$\begin{bmatrix} W & E' \\ E & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix}. \quad (5.40)$$

Решение находим классическим способом, выражая  $\mathbf{x}$  из первого уравнения:

$$\mathbf{x} = W^{-1}\mathbf{h} - W^{-1}E'\mathbf{k}.$$

Подставляем во второе уравнение и находим  $\mathbf{k}$ :

$$\mathbf{k} = (EW^{-1}E')^{-1}EW^{-1}\mathbf{h} - (EW^{-1}E')^{-1}\mathbf{t}.$$

Теперь подставляем в первое уравнение и находим:

$$\mathbf{x} = W^{-1}\mathbf{h} + W^{-1}E'(EW^{-1}E')^{-1}(\mathbf{t} - EW^{-1}\mathbf{h}). \quad (5.41)$$

Решение записывается в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W & E' \\ E & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{xx} & V_{xk} \\ V_{kx} & V_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix},$$

где

$$V_{xx} = W^{-1} - W^{-1}E'(EW^{-1}E')^{-1}EW^{-1}, \quad V_{kk} = -(EW^{-1}E')^{-1},$$

$$V_{xk} = W^{-1}E'(EW^{-1}E')^{-1}, \quad V_{kx} = (EW^{-1}E')^{-1}EW^{-1}.$$

Ковариационная матрица определяемых параметров равна

$$D_{zz} = \hat{\sigma}_0^2 V_{zz} = \begin{bmatrix} V_{xx} & V_{xk} \\ V_{kx} & V_{kk} \end{bmatrix}.$$

Отсюда апостериорные ковариации определяемых параметров равны

$$D_{xx} = \hat{\sigma}_0^2 V_{xx} = \hat{\sigma}_0^2 (W^{-1} - W^{-1}E'(EW^{-1}E')^{-1}EW^{-1}),$$

$$D_{xk} = \hat{\sigma}_0^2 V_{xk} = \hat{\sigma}_0^2 W^{-1}E'(EW^{-1}E')^{-1},$$

Теперь сформируем систему ограниченных нормальных уравнений (decomposed normal equations) и нормальный вектор (decomposed normal vector) с учетом жестких условий связи.

По-прежнему запишем уравнения в двухгрупповой форме (5.30):

$$\mathbf{l} = A\mathbf{x} + B\mathbf{y} + \mathbf{r}, \quad (5.42)$$

причем набор параметров  $\mathbf{x}$  выводится в SINEX файл, тогда как решение находится в виде комбинации  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ . Соответствующая нормальная система записывается в виде:

$$\begin{bmatrix} F & H \\ H' & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix},$$

решение которой есть:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (F - HG^{-1}H')^{-1} & -(F - HG^{-1}H')^{-1}HG^{-1} \\ -(G - H'F^{-1}H)^{-1}H'F^{-1} & (G - H'F^{-1}H)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}. \quad (5.43)$$

Поскольку нужно найти только оценки параметров  $\hat{\mathbf{x}}$ , то:

$$\hat{\mathbf{x}} = (F - HG^{-1}H')^{-1}(\mathbf{f} - HG^{-1}\mathbf{g}).$$

Пусть теперь параметры двухгрупповой модели связаны жесткими уравнениями:

$$M\hat{\mathbf{x}} + N\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{t}}. \quad (5.44)$$

Используя метод неопределенных множителей Лагранжа получим матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} F & H & M' \\ H' & G & N' \\ M & N & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix}. \quad (5.45)$$

Если ввести обозначения

$$W = \begin{bmatrix} F & H \\ H' & G \end{bmatrix}, \quad E = [M \quad N], \quad \hat{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}} \\ \hat{\mathbf{g}} \end{bmatrix},$$

то система (5.45) сводится к двухгрупповому виду (5.40):

$$\begin{bmatrix} W & E' \\ E & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\mathbf{k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix},$$

решение имеет вид (5.41):

$$\mathbf{z} = W^{-1}\mathbf{h} + W^{-1}E'(EW^{-1}E')^{-1}(\mathbf{t} - EW^{-1}\mathbf{h}) = \hat{\mathbf{z}}_0 + \Delta\hat{\mathbf{z}},$$

где  $\hat{\mathbf{z}}_0$  — оценка параметров, не связанных условием (5.44). Эта оценка равна:

$$\hat{\mathbf{z}}_0 = W^{-1}\hat{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \hat{\mathbf{y}}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (F - HG^{-1}H')^{-1}(\mathbf{f} - HG^{-1}\mathbf{g}) \\ (G - H'F^{-1}H)^{-1}(-H'F^{-1}\mathbf{f} + \mathbf{g}) \end{bmatrix}. \quad (5.46)$$

Поправка  $\Delta\hat{\mathbf{z}}$  к оценкам параметров из-за условий (5.44) равна:

$$\Delta\hat{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \Delta\hat{\mathbf{x}} \\ \Delta\hat{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = W^{-1}E'(EW^{-1}E')^{-1}(\mathbf{t} - EW^{-1}\mathbf{h})$$

или, определяя матрицу  $K$  размером  $q \times q$ :

$$K = (EW^{-1}E')^{-1} = \left( [M \quad N] \begin{bmatrix} F & H \\ H' & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} M' \\ N' \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

получим

$$\Delta\hat{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} F & H \\ H' & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} M' \\ N' \end{bmatrix} K \left( \mathbf{t} - [M \quad N] \begin{bmatrix} F & H \\ H' & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} \right). \quad (5.47)$$

Обозначим  $q \times 1$ -вектор

$$\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{t} - [M \quad N] \begin{bmatrix} F & H \\ H' & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}$$

найдем решение

$$\hat{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_0 + \Delta\hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}}_0 + \Delta\hat{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (F - HG^{-1}H')^{-1}(\mathbf{f} - HG^{-1}\mathbf{g} + \Delta\mathbf{f}) \\ (G - H'F^{-1}H)^{-1}(-H'F^{-1}\mathbf{f} + \mathbf{g} + \Delta\mathbf{g}) \end{bmatrix}, \quad (5.48)$$

где

$$\Delta \mathbf{f} = M' K \tilde{\mathbf{t}}, \quad \Delta \mathbf{g} = N' K \tilde{\mathbf{t}}.$$

Таким образом система ограниченных нормальных уравнений (decomposed normal equations) и нормальный вектор (decomposed normal vector) с учетом жестких условий связи для выбранного набора параметров  $\mathbf{x}$  имеют вид:

$$A_{dec} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{l}_{dec}, \quad (5.49)$$

где

$$A_{dec} = (F - HG^{-1}H'), \quad \mathbf{l}_{dec} = \mathbf{f} - HG^{-1}\mathbf{g} + \Delta \mathbf{f}.$$

#### 5.1.4 Уравнения связи

При одновременном оценивании параметров, например, координат антенн, координат источников, параметров вращения Земли при решении системы (5.1) ранг матрицы  $A$  оказывается неполным. Причиной вырожденности системы является, во-первых, независимость задержки от произвольного параллельного переноса земной системы координат, т.е. от положения начала ITRF. Во-вторых, произвольный поворот осей ITRF может быть представлен как поправки к параметрам вращения Земли. В-третьих, произвольный поворот небесной системы координат ICRF также может быть интерпретирован как изменение параметров вращения Земли. Наконец, рассинхронизация относительно шкалы UTC и ход часов на каждой станции неизвестны с необходимой точностью, и в уравнения входят разности для каждой пары станций (4.39). Поэтому, при решении системы (5.1) следует либо положить коэффициенты  $C_0^j, C_1^j, C_2^j$  для  $j$ -й станции, равными нулю, либо использовать уравнения связи.

Таким образом, для снятия вырождения матрицы  $A$  (5.1) используются условия:

Сумма поправок координат телескопов относительно системы ITRF равна нулю, т.е.

$$\sum_{i=1}^N \Delta \mathbf{r}_i = 0.$$

Суммарный поворот телескопов относительно системы ITRF равен нулю, т.е.

$$\sum_{i=1}^L \frac{\mathbf{R}_i \times \Delta \mathbf{r}_i}{|\mathbf{R}_i|^2} = 0,$$

$L$  — число телескопов. Последнее условие эквивалентно отсутствию глобального вращения (No-Net-Rotation, NNR) системы координат.

Эти уравнения эквивалентны шести уравнениям:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^L \Delta X_i &= 0; & \sum_{i=1}^L \Delta Y_i &= 0; & \sum_{i=1}^L \Delta Z_i &= 0; \\ \sum_{i=1}^L \frac{1}{R_i^2} (Y_i \Delta Z_i - Z_i \Delta Y_i) &= 0; & \sum_{i=1}^L \frac{1}{R_i^2} (Z_i \Delta X_i - X_i \Delta Z_i) &= 0; \\ \sum_{i=1}^L \frac{1}{R_i^2} (X_i \Delta Y_i - Y_i \Delta X_i) &= 0. \end{aligned}$$

Аналогичное условие NNR можно записать для ICRF:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^K (\sin \alpha \Delta \delta - \cos \alpha \cos \delta \cos \delta \Delta \alpha) &= 0; \\ \sum_{i=1}^K (-\cos \alpha \Delta \delta - \sin \alpha \cos \delta \cos \delta \Delta \alpha) &= 0; \\ \sum_{i=1}^K (\cos^2 \delta \Delta \alpha) &= 0, \end{aligned}$$

$K$  — число источников. Обычно условие NNR применяется к некоторому набору источников (например, к так называемым «определяющим» источникам). Если находятся поправки к координатам других источников, то никаких ограничений на эти поправки не накладывается.

В пакете АРИАДНА для повышения точности оценивания параметров 24-часовой сеанс наблюдений разбивается на  $N$  сегментов. В каждом сегменте функция часов и влажная тропосферная задержка представлены в виде разложения по полиномам Чебышева  $T$ :

$$f(\tau_i) = \sum_{k=0}^D a_k T_k(\tau_i),$$

где  $\tau_i = [-1, +1]$  — независимый аргумент (нормализованное время):

$$\tau_i = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} (2t'_i - t_{i+1} - t_i),$$

$t_{i+1}, t_i$  — границы сегмента,  $t'_i$  — момент наблюдения. Степень  $D$  полинома для функции часов по умолчанию равна 2. Для описания быстрого изменения влажной тропосферной задержки обычно используются полиномы более высокой степени (от 2 до 6).

Значения функции часов в любой момент времени каждого сегмента должны быть центрированы по всем станциям:

$$\sum_{l=0}^L a_{n,k}^{(l)} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, D; n = 1, \dots, N,$$

$n$  — нумерация сегментов, т.е.  $(D + 1) \cdot N$  уравнений.

В качестве альтернативного варианта можно выбрать часы на какой-либо станции за опорные и вычислять ход часов на других станциях относительно опорных.

На границах сегментов значения модельного ряда (функция часов, тропосферная задержка) должны совпадать:

$$\sum_{k=0}^D a_{n,k}^{(l)} T_k(+1) - \sum_{k=0}^D a_{n+1,k}^{(l)} T_k(-1) = 0,$$

т.е. для каждого телескопа для каждого модельного ряда добавляется  $N - 1$  уравнение связи.

Заметим, что для тропосферной задержки число уравнений равно  $(N - 1) * L$ , тогда как для модели часов только  $(N - 1) * (L - 1)$ .  $(N - 1)$ -е уравнение связи для телескопа с номером  $L$  коррелирует с суммой коэффициентов модели часов одного порядка, которая равна нулю, для каждого сегмента.

Такие же условия используются для производных:

$$\sum_{k=0}^D a_{n,k}^{(l)} \frac{\partial^p}{\partial \tau^p} T_k(+1) - \sum_{k=0}^D a_{n+1,k}^{(l)} \frac{\partial^p}{\partial \tau^p} T_k(-1) = 0,$$

т.е. всего  $N - 1$  уравнение связи для каждого телескопа для каждого модельного ряда. В настоящей версии пакета  $p = 1$ . Справедливо указанное выше замечание.

## 5.2 Использование фильтра Калмана

### 5.2.1 Постановка задачи

Предположим, что имеется некоторая динамическая система, состояние которой непрерывно меняется со временем. Выходной сигнал системы  $\mathbf{y}(t)$  ( $n$ -мерный вектор) известен и несет информацию о состоянии системы, которое описывается *вектором состояния*  $\mathbf{x}(t)$ . Вектор состояния  $\mathbf{x}(t)$  — это неизвестный  $m$ -мерный случайный вектор:  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)]$ .

Связь между наблюдаемым выходным сигналом  $\mathbf{z}(t)$  динамической системы и вектором состояния  $\mathbf{x}(t)$  имеет линейный вид

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{r}(t), \quad (5.50)$$

где  $\mathbf{C}(t)$  — известная  $n \times m$ -матрица, называемая матрицей плана,  $\mathbf{r}(t)$  — неизвестный  $n$ -мерный вектор невязок. Уравнение (5.50) называется моделью наблюдений. Будем считать, что модель полная, тогда невязки  $\mathbf{r}(t)$  можно считать центрированным белым шумом.

Для дискретных систем состояние известно в моменты наблюдений  $t_0, t_1, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots$ , причем моменты  $t_k, t_{k+1}$  для разных  $k$  не обязательно равноотстоят друг от друга. Удобно моменты наблюдений обозначать их порядковыми номерами:  $0, 1, \dots, k, k+1, \dots$ .

Тогда модель наблюдения в дискретном виде есть:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{r}(k), \quad (5.51)$$

Будем считать, что вектор состояния меняется в соответствии с *уравнением состояния*, также записанном в дискретном виде:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k), \quad (5.52)$$

где матрица  $\mathbf{A}(k)$  размерности  $m \times m$  предполагается известной.

Тогда задача фильтрации формулируется следующим образом.

Рассматривается динамическая система:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{r}(k), \\ \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k), \end{aligned} \quad (5.53)$$

матрицы  $\mathbf{A}(k)$  размерности  $m \times m$  и  $\mathbf{C}(k)$  размерности  $n \times m$  предполагаются известными. Измеряемый вектор  $\mathbf{y}(k)$  имеет размерность  $n$ .

Вектор невязок  $\mathbf{r}(t)$  размерности  $n$  и  $m$ -мерный вектор возмущений  $\mathbf{v}(k)$  представляют собой дискретные случайные процессы типа белого шума с нулевым средним и известными а priori автоковариациями:

$$E\{\mathbf{r}(k)\} = 0, \quad E\{\mathbf{r}(k)\mathbf{r}'(j)\} = \mathbf{Q}(k)\delta_{kj}, \quad (5.54)$$

$$E\{\mathbf{v}(k)\} = 0, \quad E\{\mathbf{v}(k)\mathbf{v}'(j)\} = \mathbf{V}(k)\delta_{kj}, \quad (5.55)$$

где  $\delta_{kj}$  — символ Кронеккера, штрих обозначает транспонирование. Предполагается также, что начальное состояние, ошибки измерений и вектор возмущений взаимно не коррелированы:

$$E\{\mathbf{x}(0)\mathbf{r}'(j)\} = 0, \quad E\{\mathbf{x}(0)\mathbf{v}'(j)\} = 0, \quad E\{\mathbf{v}(k)\mathbf{r}'(k)\} = 0. \quad (5.56)$$

Требуется на основе имеющихся данных  $\mathbf{y}(k)$  построить такую линейную несмещенную оценку вектора  $\hat{\mathbf{x}}(k)$ , чтобы дисперсии ошибок

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k), \quad (5.57)$$

т.е. диагональные элементы матрицы апостериорных автоковариаций

$$\mathbf{D}(k) = E\{\tilde{\mathbf{x}}(k)\tilde{\mathbf{x}}'(k)\} \quad (5.58)$$

были минимальны.

Эта задача называется фильтрацией Калмана [3, 29].

### 5.2.2 Динамические системы

Рассмотрим линейную систему, состояние которой описывается дифференциальным уравнением 1-го порядка:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{u}(t), \quad (5.59)$$

где  $\mathbf{x}(t)$  —  $m$ -мерный вектор состояния системы,  $\mathbf{u}(t)$  —  $p$ -мерный известный вектор регулирующего воздействия,  $\mathbf{F}(t)$ ,  $\mathbf{G}(t)$  — заданные матрицы размерности  $m \times m$  и  $m \times p$  соответственно.

Общее решение уравнения (5.59) имеет вид:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0)e^{\int_{t_0}^t \mathbf{F}(\tau)d\tau} + e^{\int_{t_0}^t \mathbf{F}(\tau)d\tau} \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\tau} \mathbf{F}(\psi)d\psi} \mathbf{G}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau. \quad (5.60)$$

Определяя *переходную* матрицу как

$$\Phi(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t \mathbf{F}(\tau)d\tau}, \quad (5.61)$$

перепишем выражение (5.60) в виде

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0)\Phi(t, t_0) + \Phi(t, t_0) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau, t_0)\mathbf{G}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau. \quad (5.62)$$

Решение состоит, таким образом, из суммы свободного и вынужденного, определяемого внешним регулирующим воздействием  $\mathbf{u}(t)$ , членов.

Переходная матрица  $\Phi(t, t_0)$  полностью определяется матрицей  $\mathbf{F}(t)$  и, как видно из (5.61), связана с ней уравнением:

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{F}(t)\Phi(t, t_0) \quad (5.63)$$

с начальным условием  $\Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I}$ .

Из (5.61) и (5.63) следуют свойства переходной матрицы:

$$\Phi(t, t) = \Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I}; \Phi^{-1}(t, \tau) = \Phi(\tau, t); \Phi(t, \psi)\Phi(\psi, \tau) = \Phi(t, \tau). \quad (5.64)$$

Используя эти свойства выражение (5.62) запишем в виде

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0)\Phi(t, t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{G}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau. \quad (5.65)$$

В простейшем случае уравнение состояния системы (5.59) имеет вид:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x}, \quad (5.66)$$

причем элементы матрицы  $\mathbf{F}$  не зависят от времени, т.е. речь идет о стационарной системе. Решение можно записать в виде

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0). \quad (5.67)$$

Для стационарной системы есть два простых способа определения переходной матрицы: использование преобразования Лапласа или разложение в ряд Тейлора.

Преобразование Лапласа  $\mathcal{L}$  ставит в соответствие функции (оригиналу)  $f(t)$  действительной переменной  $t$  единственную функцию  $f(s)$  (изображение) комплексной переменной  $s$ :

$$f(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt. \quad (5.68)$$

Обратное преобразование Лапласа  $\mathcal{L}^{-1}[f(s)]$  функции комплексной переменной  $s$  есть функция  $f(t)$ , для которой преобразование Лапласа (5.68) есть  $f(s)$ .

Тогда

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}], \quad (5.69)$$

где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица.

Второй способ определения  $\Phi$  — это разложение в ряд Тейлора:

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{F}t} = \mathbf{I} + \mathbf{F}t + \frac{(\mathbf{F}t)^2}{2!} + \dots + \frac{(\mathbf{F}t)^n}{n!}. \quad (5.70)$$

Например, дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

имеет решение  $x = \sin \omega t$ , т.е.  $\dot{x} = \omega \cos \omega t$ . Значит, модель состояния системы имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix},$$

т.е. переходная матрица есть

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Значит,

$$\Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ \omega^2 & s \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + \omega^2} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -\omega^2 & s \end{bmatrix}.$$

Используя таблицы обратного преобразования Лапласа находим:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \omega^{-1} \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}.$$

Легко показать, что разложение в ряд Тейлора приводит к такому же результату.

Состояние динамической системы с дискретным временем в два следующих друг за другом момента времени описывается формулой, которая вытекает из общего решения (5.65):

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}, t_k)\mathbf{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau)\mathbf{G}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau. \quad (5.71)$$

Связь между измеряемыми значениями выходного сигнала  $y(t)$  и состоянием системы имеет вид

$$\mathbf{y}(t_k) = \mathbf{C}(t_k)\mathbf{x}(t_k). \quad (5.72)$$

Если моменты времени  $t_k$  пронумеровать целыми числами  $k$ , то  $\Phi(t_{k+1}, t_k) = \Phi(k+1, k)$ . Положим теперь

$$\Phi(k+1, k) = \mathbf{A}(k). \quad (5.73)$$

При кусочно-постоянном регулирующем воздействии  $u(t_k) = u(k) = \text{const}$   $u(k)$  можно вынести за знак интеграла в (5.71) и положить

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) \mathbf{G}(\tau) d\tau = \mathbf{B}(k).$$

Тогда дискретный вариант динамической системы описывается выражениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k), \\ \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k). \end{aligned} \quad (5.74)$$

Наконец, если на систему кроме известных входных воздействий  $u(k)$  действуют стохастические возмущения  $v(k)$ , измерения выходного сигнала  $y(k)$  проводятся с ошибками  $r(k)$ , то имеем следующую расширенную модель системы (сравните с (5.53)):

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{r}(k), \\ \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{v}(k). \end{aligned} \quad (5.75)$$

### 5.2.3 Алгоритмы фильтрации

Если в начальный момент времени  $k = 0$  информации о начальном состоянии системы нет, то для решения задачи (5.53) с учетом (5.57) и (5.58) используется следующий рекуррентный алгоритм [8].

#### Рекуррентное гауссовско-марковское оценивание

На **первом этапе** необходимо выполнить предварительные наблюдения, число которых должно превышать число неизвестных параметров  $m$  и решить систему уравнений (5.51) методом наименьших квадратов, найти оценку вектора состояния  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  для  $t = t_k$  и ковариационную матрицу ошибок оценивания  $\mathbf{D}(k)$ ; оценки  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  и матрица  $\mathbf{D}(k)$  принимаются за начальные данные для дальнейшего рекуррентного процесса.

На **втором этапе** полученную оценку вектора состояния экстраполируем приближенно на следующий момент времени  $t_{k+1}$  с помощью выражения:

$$\hat{\mathbf{x}}_*(k+1) = \mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{x}}(k), \quad (5.76)$$

который не учитывает возмущения  $\mathbf{v}(k)$ . Оценка  $\hat{\mathbf{x}}_*(k+1)$  получена благодаря знанию переходной матрицы  $\mathbf{A}(k)$  с учетом предшествующих наблюдений. Для вычисления ее ошибки  $\tilde{\mathbf{x}}_*(k+1)$  используем выражение (5.57):

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_*(k+1) &= \mathbf{x}(k+1) - \hat{\mathbf{x}}_*(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) - \mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{x}}(k) = \\ &= \mathbf{A}(k)\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{v}(k),\end{aligned}\quad (5.77)$$

Находится ковариационная матрица ошибок этой оценки:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_*(k+1) &= E\{\tilde{\mathbf{x}}_*(k+1)\tilde{\mathbf{x}}_*'(k+1)\} = \\ &= E\{[\mathbf{A}(k)\tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{v}(k)][\tilde{\mathbf{x}}'(k)\mathbf{A}'(k) + \mathbf{v}'(k)]\} = \mathbf{A}(k)\mathbf{D}(k)\mathbf{A}'(k) + \mathbf{V}(k).\end{aligned}$$

На **третьем этапе** экстраполированная оценка (5.76) уточняется с учетом новых наблюдений.

Пусть теперь в момент  $t_{k+1}$  получено новое наблюдение:

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{C}(k+1)\mathbf{x}(k+1) + \mathbf{r}(k+1). \quad (5.78)$$

Запишем уравнения (5.77) и (5.78) в виде системы:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_*(k+1) \\ \mathbf{y}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{C}(k+1) \end{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) + \begin{bmatrix} -\mathbf{A}(k)\tilde{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{v}(k) \\ \mathbf{r}(k+1) \end{bmatrix} \quad (5.79)$$

или в краткой форме

$$\mathbf{h} = \mathbf{H}\mathbf{x}(k+1) + \mathbf{s}. \quad (5.80)$$

Ковариации нового случайного вектора  $\mathbf{s}$  определяются матрицей:

$$\mathbf{S} = E\{\mathbf{s}\mathbf{s}'\} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_*(k+1) & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}(k+1) \end{bmatrix}, \quad (5.81)$$

$\mathbf{Q}(k+1)$  — априорная ковариация нового наблюдения.

Теперь систему (5.79) можно решить по МНК с априорной ковариационной матрицей  $\mathbf{S}$ . Тогда гауссовско-марковская оценка [3] неизвестного вектора  $\mathbf{x}(k+1)$  будет равна

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{H}'\mathbf{S}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{h}. \quad (5.82)$$

Уточненная матрица  $\mathbf{D}(k+1) = (\mathbf{H}'\mathbf{S}\mathbf{H})^{-1}$  дает апостериорные ковариации оценок  $\tilde{\mathbf{x}}(k+1)$ . Так как  $\mathbf{D}^{-1}(k+1) = \mathbf{H}'\mathbf{S}\mathbf{H}$ , то

$$\mathbf{D}^{-1}(k+1) = \mathbf{D}_*^{-1}(k+1) + \mathbf{C}'(k+1)\mathbf{Q}^{-1}(k+1)\mathbf{C}(k+1), \quad (5.83)$$

$$\mathbf{H}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{h} = \mathbf{D}_*^{-1}(k+1)\hat{\mathbf{x}}_*(k+1) + \mathbf{C}'(k+1)\mathbf{Q}^{-1}(k+1)\mathbf{y}(k+1).$$

Подставляя вместо  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{S}$  соответствующие матрицы в результате получим оценку вектора  $\hat{\mathbf{x}}(k+1)$ :

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{D}(k+1)[\mathbf{D}_*^{-1}(k+1)\hat{\mathbf{x}}_*(k+1) + \mathbf{C}'(k+1)\mathbf{Q}^{-1}(k+1)\mathbf{y}(k+1)]. \quad (5.84)$$

Пусть

$$\mathbf{K}(k+1) = \mathbf{D}(k+1)\mathbf{C}'(k+1)\mathbf{Q}^{-1}(k+1). \quad (5.85)$$

Матрица  $\mathbf{K}(k+1)$  называется матрицей усиления. Умножим (5.83) на  $\mathbf{D}(k+1)$ :

$$\mathbf{I} = \mathbf{D}(k+1)\mathbf{D}_*^{-1}(k+1) + \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1) \quad (5.86)$$

и разрешим относительно  $\mathbf{D}(k+1)\mathbf{D}_*^{-1}(k+1)$ . Результат подставим в (5.84) и получим окончательную оценку:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{x}}_*(k+1) + \mathbf{K}(k+1)[\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{C}(k+1)\hat{\mathbf{x}}_*(k+1)]. \quad (5.87)$$

Ковариацию ошибок этой оценки вычислим, умножив (5.86) справа на  $\mathbf{D}_*(k+1)$ . В результате получим:

$$\mathbf{D}(k+1) = \mathbf{D}_*(k+1) - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1)\mathbf{D}_*(k+1). \quad (5.88)$$

Умножая справа это уравнение на  $\mathbf{C}'(k+1)$ , а левую часть справа на единичную матрицу  $\mathbf{I} = \mathbf{Q}^{-1}(k+1)\mathbf{Q}(k+1)$ , решая относительно  $\mathbf{K}(k+1)$ , получим

$$\mathbf{K}(k+1) = \mathbf{D}_*(k+1)\mathbf{C}'(k+1)[\mathbf{C}(k+1)\mathbf{D}_*(k+1)\mathbf{C}'(k+1) + \mathbf{Q}(k+1)]^{-1}. \quad (5.89)$$

Применительно к сети РСДБ, состоящей из  $N$  телескопов, в каждый момент времени на  $N(N-1)/2$  базах определяется разность измеренной и вычисленной задержек:  $\tau_o(k) - \tau_c(k)$ . Таким образом, измеряемый вектор  $\mathbf{y}(k)$  имеет размерность  $n = N(N-1)/2$ .

Этот рекуррентный алгоритм называется *фильтром Калмана*.

В частном случае, когда наблюдаемой величиной в каждый момент времени является скаляр, т. е.  $n = 1$ ,  $\mathbf{y}(k) = y(k)$ ,  $\mathbf{r}(k) = r(k)$ , матрица  $\mathbf{C}(k)$  заменяется строкой  $\mathbf{c}'(k)$  длиной  $m$ , алгоритм фильтра Калмана становится более простым.

Имеем динамическую систему вида

$$\begin{aligned} y(k) &= \mathbf{c}'(k)\mathbf{x}(k) + r(k), \\ \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) \end{aligned} \quad (5.90)$$

и начальные оценки вектора состояния  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  ковариационную матрицу ошибок оценивания  $\mathbf{D}(k)$ . Экстраполяция для  $k+1$ -го момента времени определяется формулами:

$$\hat{\mathbf{x}}_*(k+1) = \mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{x}}(k), \quad (5.91)$$

$$\mathbf{D}_*(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{D}(k)\mathbf{A}'(k) + \mathbf{V}(k). \quad (5.92)$$

Окончательная оценка равна:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{x}}_*(k+1) + \mathbf{k}(k+1)[y(k+1) - \mathbf{c}'(k+1)\hat{\mathbf{x}}_*(k+1)], \quad (5.93)$$

$$\mathbf{D}(k+1) = \mathbf{D}_*(k+1) - \mathbf{k}(k+1)\mathbf{c}'(k+1)\mathbf{D}_*(k+1). \quad (5.94)$$

Матрица усиления становится  $m \times 1$ -вектором  $\mathbf{k}(k+1)$ :

$$\mathbf{k}(k+1) = \mathbf{D}_*(k+1)\mathbf{c}(k+1)[\mathbf{c}'(k+1)\mathbf{D}_*(k+1)\mathbf{c}(k+1) + q(k+1)]^{-1}, \quad (5.95)$$

где  $q(k+1) = E\{r^2(k+1)\}$ .

### Рекуррентное оценивание с минимальной среднеквадратической ошибкой

В предыдущем параграфе фильтр Калмана был построен на основе рекуррентного гауссовско-марковского оценивания. Недостатком метода является то, что для вычисления первой оценки и начала рекуррентной процедуры требуется не менее  $m$  предварительных наблюдений  $y(k)$ .

Метод минимальной среднеквадратической ошибки позволяет сразу после проведения первого наблюдения  $y(0)$  построить оценку вектора  $\mathbf{x}(0)$ . При этом предполагается, что матрица ковариации вектора  $\mathbf{x}(0)$  конечна и известна.

В первый момент наблюдений  $t_0$  ( $k=0$ ) получается измерение

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{C}(0)\mathbf{x}(0) + \mathbf{r}(0),$$

причем матрицы априорных ковариаций векторов  $\mathbf{x}(0)$  и  $\mathbf{r}(0)$  равны:

$$E\{\mathbf{x}(0)\mathbf{x}'(0)\} = \bar{\mathbf{P}}(0), \quad E\{\mathbf{r}(0)\mathbf{r}'(0)\} = \mathbf{Q}(0).$$

Тогда несмещенная оценка с минимальной среднеквадратической ошибкой равна

$$\hat{\mathbf{x}}(0) = \bar{\mathbf{K}}(0)\mathbf{y}(0), \quad (5.96)$$

где  $\bar{\mathbf{K}}(0)$  — матрица начального усиления:

$$\bar{\mathbf{K}}(0) = \bar{\mathbf{P}}(0)\mathbf{C}'(0)[\mathbf{C}(0)\bar{\mathbf{P}}(0)\mathbf{C}'(0) + \mathbf{Q}(0)]^{-1}. \quad (5.97)$$

Апостериорная матрица ковариации полученной оценки равна:

$$\mathbf{D}(0) = \bar{\mathbf{P}}(0) - \bar{\mathbf{K}}(0)\mathbf{C}(0)\bar{\mathbf{P}}(0). \quad (5.98)$$

Оценку (5.96) и ее ковариацию (5.98) можно принять в качестве начальных условий для рекуррентного алгоритма гауссовско-марковское оценивания. Для этого нужно также положить

$$\hat{\mathbf{x}}_*(0) = 0, \quad \mathbf{D}_*(0) = \bar{\mathbf{P}}(0). \quad (5.99)$$

Линейная несмещенная оценка с минимальной среднеквадратической ошибкой определяется с помощью следующего рекуррентного алгоритма:

1) экстраполяция вектора на момент времени  $t_{k+1} > t_0$ :

$$\hat{\mathbf{x}}_*(k+1) = \mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{x}}_*(k), \quad \hat{\mathbf{x}}_*(0) = 0; \quad (5.100)$$

2) вычисление матрицы ковариации этой оценки вектора состояния:

$$\mathbf{D}_*(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{D}_*(k)\mathbf{A}'(k) + \mathbf{V}(k), \quad \mathbf{D}_*(0) = \bar{\mathbf{P}}(0); \quad (5.101)$$

3) вычисление матрицы усиления:

$$\mathbf{K}(k+1) = \mathbf{D}_*(k+1)\mathbf{C}'(k+1)[\mathbf{C}(k+1)\mathbf{D}_*(k+1)\mathbf{C}'(k+1) + \mathbf{Q}(k+1)]^{-1}; \quad (5.102)$$

4) вычисление уточненной оценки вектора состояния с учетом новых наблюдений:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{x}}_*(k+1) + \mathbf{K}(k+1)[\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{C}(k+1)\hat{\mathbf{x}}_*(k+1)]; \quad (5.103)$$

5) вычисление матрицы ковариации уточненной оценки вектора состояния:

$$\mathbf{D}(k+1) = \mathbf{D}_*(k+1) - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1)\mathbf{D}_*(k+1). \quad (5.104)$$

Принципиально важное предположение о равенстве нулю математического ожидания начального значения вектора состояния  $E\{\mathbf{x}(0)\} = 0$  легко обойти, если это матожидание известно. Пусть  $E\{\mathbf{x}(0)\} = \xi \neq 0$ .

Рассмотрим расширенную модель системы (5.75):

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{r}(k), \\ \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) + \mathbf{v}(k). \end{aligned}$$

В этом случае вектор состояния  $\mathbf{x}(k)$  и измеряемый вектор  $\mathbf{y}(k)$  содержат детерминированную составляющую:  $\xi$  имеет конечное значение, последовательность  $p$ -мерных воздействий  $\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \dots, \mathbf{u}(k)$  известна точно.

Тогда линейная несмещенная оценка  $\mathbf{x}(k)$  с минимальной среднеквадратической ошибкой определяется с помощью следующего алгоритма [3] (стр.75–78):

1) экстраполяция вектора на момент времени  $t_{k+1} > t_0$ :

$$\hat{\mathbf{x}}_*(k+1) = \mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k), \quad \hat{\mathbf{x}}_*(0) = \xi; \quad (5.105)$$

2) вычисление матрицы ковариации этой оценки вектора состояния:

$$\mathbf{D}_*(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{D}(k)\mathbf{A}'(k) + \mathbf{V}(k), \quad \mathbf{D}_*(0) = \bar{\mathbf{P}}(0); \quad (5.106)$$

3) вычисление матрицы усиления:

$$\mathbf{K}(k+1) = \mathbf{D}_*(k+1)\mathbf{C}'(k+1)[\mathbf{C}(k+1)\mathbf{D}_*(k+1)\mathbf{C}'(k+1) + \mathbf{Q}(k+1)]^{-1}; \quad (5.107)$$

$$\bar{\mathbf{K}}(0) = \bar{\mathbf{P}}(0)\mathbf{C}'(0)[\mathbf{C}(0)\bar{\mathbf{P}}(0)\mathbf{C}'(0) + \mathbf{Q}(0)]^{-1}.$$

4) вычисление уточненной оценки вектора состояния с учетом новых наблюдений:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{x}}_*(k+1) + \mathbf{K}(k+1)[\mathbf{y}(k+1) - \mathbf{C}(k+1)\hat{\mathbf{x}}_*(k+1)]; \quad (5.108)$$

5) вычисление матрицы ковариации уточненной оценки вектора состояния:

$$\mathbf{D}(k+1) = \mathbf{D}_*(k+1) - \mathbf{K}(k+1)\mathbf{C}(k+1)\mathbf{D}_*(k+1). \quad (5.109)$$

### Вычисление переходной матрицы

Предположим, что известны статистические характеристики процесса  $\mathbf{x}(t)$ . Если этот процесс марковский, то он имеет вид

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k),$$

поскольку новое значение вектора  $\mathbf{x}(k+1)$  зависит только от его предыдущего значения  $\mathbf{x}(k)$ , а белый шум имеет неизвестную ковариацию

$$E\{\mathbf{v}(k)\mathbf{v}'(j)\} = \mathbf{Q}(k)\delta_{kj}.$$

Переходная матрица, соответствующая  $\mathbf{A}(k)$ , есть  $\Phi(k+1, k)$  (5.73).

Пусть задана последовательность матриц ковариации вектора  $\mathbf{x}(k)$ :

$$\mathbf{P}(k_2, k_1) = E\{\mathbf{x}(k_2)\mathbf{x}'(k_1)\}; \quad k_0 \leq k_1 \leq k_2. \quad (5.110)$$

Если вектор состояния представляет собой скаляр  $\mathbf{x}(k) = x(k)$ , то все ковариации задаются его автоковариационной функцией.

Тогда переходная матрица равна [3] (стр.129-131):

$$\Phi(k_2, k_1) = \mathbf{P}(k_2, k_1)\mathbf{P}^{-1}(k_1, k_1). \quad (5.111)$$

При  $k_2 = k + 1$  и  $k_1 = k$  получим

$$\Phi(k + 1, k) = \mathbf{P}(k + 1, k)\mathbf{P}^{-1}(k, k). \quad (5.112)$$

Учитывая определение (5.73), находим матрицу  $\mathbf{A}(k)$ :

$$\mathbf{A}(k) = \mathbf{P}(k + 1, k)\mathbf{P}^{-1}(k, k). \quad (5.113)$$

Ковариационная матрица находится из выражения:

$$\mathbf{Q}(k) = \mathbf{P}(k + 1, k + 1) - \mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k, k)\mathbf{A}'(k). \quad (5.114)$$

### Фильтр Калмана с условиями

Если некоторые из элементов вектора состояния  $\mathbf{x}(t)$  связаны жесткими условиями, то фильтр Калмана строится следующим образом.

Перепишем выражение (5.84) в виде:

$$\mathbf{U}(k + 1)\hat{\mathbf{x}}(k + 1) = \mathbf{f}(k + 1), \quad (5.115)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(k + 1) &= \mathbf{D}^{-1}(k + 1), \\ \mathbf{f}(k + 1) &= \mathbf{D}_*^{-1}(k + 1)\hat{\mathbf{x}}_*(k + 1) + \mathbf{C}'(k + 1)\mathbf{Q}^{-1}(k + 1)\mathbf{y}(k + 1). \end{aligned}$$

В пакете АРИАДНА ход часов на  $i$ -ом телескопе ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) на суточном интервале представляется в виде разложения по полиномам Чебышева:

$$\Delta\tau_i(t) = \sum_{j=0}^K C_{i,j}T_j(t).$$

Для устранения смещения группового хранителя времени относительно опорной шкалы UTC коэффициенты  $C_{i,j}$  должны удовлетворять условиям:

$$\sum_{j=0}^N C_{i,0} = \sum_{j=0}^N C_{i,1} = \dots = \sum_{j=0}^N C_{i,K} = 0.$$

Запишем эти условия в виде системы уравнений:

$$\mathbf{t}(k + 1) = \mathbf{E}(k + 1)\hat{\mathbf{x}}(k + 1). \quad (5.116)$$

Таким образом рассматриваем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(k+1)\widehat{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{f}(k+1), \\ \mathbf{E}(k+1)\widehat{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{t}(k+1). \end{aligned} \quad (5.117)$$

Используя метод Лагранжа, получим нормальную систему:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}(k+1) & \mathbf{E}'(k+1) \\ \mathbf{E}(k+1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \lambda(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(k+1) \\ \mathbf{t}(k+1) \end{bmatrix}, \quad (5.118)$$

решение которой дает вектор

$$\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{x}}(k+1) \\ \widehat{\lambda}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{U}}(k+1) & \mathbf{B}(k+1) \\ \mathbf{B}'(k+1) & \mathbf{W}(k+1) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{f}(k+1) \\ \mathbf{t}(k+1) \end{bmatrix}.$$

Принимая теперь  $\widehat{\mathbf{x}}(k+1)$  за окончательную оценку вектора состояния на момент  $t_{k+1}$ , а  $\widetilde{\mathbf{D}}(k+1) = \widetilde{\mathbf{U}}^{-1}(k+1)$  за ее ковариацию, рекуррентный процесс может быть продолжен далее.

## 5.2.4 Применение фильтра Калмана в радиоастрометрии

Система линеаризованных уравнений (5.1)

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{r}$$

в данном параграфе будет преобразована с учетом деления параметров на глобальные и стохастические.

Напомним, что левая часть в (5.1) представляет собой  $n$ -мерный вектор  $\mathbf{l}$  — разницу между измеренной и вычисленной задержкой ( $\tau_o - \tau_c$ ), причем для вычисления  $\tau_c$  использовался априорный вектор  $\mathbf{x}_0$ . Матрица  $\mathbf{A}$  — известная  $n \times m$ -матрица плана (в нашем случае матрица частных производных задержки по параметрам  $\mathbf{x}_0$ ).

Вектор  $\mathbf{x}$  — это неизвестный  $m$ -мерный вектор, объединяющий постоянные параметры. Стохастические параметры объединим в вектор  $\mathbf{z}$ , причем количество параметров равно  $K$ . Тогда система уравнений примет вид:

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \sum_{i=1}^K \mathbf{B}_i \mathbf{z}_i + \mathbf{r},$$

где  $\mathbf{z}_i$  — один из  $K$  векторов размерности  $k$ , т.е.  $\mathbf{z}_i = (z_{i1}, z_{i1}, \dots, z_{ik})$ ,  $\mathbf{B}_i = \text{diag}(b_{i1}, b_{i1}, \dots, b_{ik})$  — соответствующая ему диагональная матрица плана размером  $k \times k$ .

Если вектор  $\mathbf{z}$  представляет совокупный вектор  $K$  параметров, т.е.

$$\mathbf{z} = [\mathbf{z}_i], \quad i = 1, 2, \dots, K,$$

блочная матрица  $\mathbf{B}$  объединяет матрицы плана  $\mathbf{B}_i$ :

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_K],$$

то систему уравнений можно записать в виде двухгрупповой модели:

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{z} + \mathbf{r}. \quad (5.119)$$

Применительно к обработке суточного сеанса наблюдений к параметрам  $\mathbf{x}$  можно отнести координаты телескопов. Таким образом, если  $N$  — число телескопов, то  $m = 3 \times N$ . К стохастическим параметрам отнесем: влажную задержку в зените на каждом пункте, функцию часов на каждом пункте, внутрисуточные вариации в координатах полюса и всемирном времени. Значит,  $K = 2 \times N + 3$ . Для снятия вырождения матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  необходимо добавить дополнительные условия связи.

В качестве альтернативного варианта можно выбрать часы на какой-либо станции за опорные и вычислять ход часов на других станциях относительно опорных. Аналогично можно считать координаты одного из телескопов как известные точно. Тогда  $m = 3 \times (N - 1)$ ,  $K = 2 \times N + 2$ .

Матрица ковариации вектора  $\mathbf{z}$  (5.110) для однобазового интерферометра будет иметь вид:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{Z_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_{Z_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{P}_{cl} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{P}_{x_p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{P}_{y_p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{P}_{UT} \end{bmatrix}.$$

Как показано в [8] матрица ковариации  $\mathbf{P}$  может быть получена на основе корреляционных функций вида

$$q_x(t) = \frac{\sigma_x^2}{\cos \varphi} e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \varphi)$$

для стохастического процесса (параметра)  $x(t)$  с дисперсией  $\sigma_x^2$ . Параметром  $x$  может быть влажная задержка в зените, функция часов. Поскольку в

спектре внутрисуточных вариаций ПВЗ доминируют суточные и полусуточные гармоники, то для координат полюса  $x_p, y_p$  и всемирного времени UT корреляционные функции имеют вид, :

$$q_x(t) = \sigma_x^2 e^{-\alpha t} [a \cos(\omega t + \varphi) + b \cos(2\omega t + \psi)],$$

$\omega$  — угловая скорость вращения Земли.

# Литература

- [1] *Бескин В.С.* Осесимметричные стационарные течения в компактных астрофизических объектах. *Успехи физических наук.* 1997, т.167, №7, стр.689-720.
- [2] *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики, 2-е изд., М: Наука, 1973.
- [3] *Браммер К., Зиффлинг Г.* Фильтр Калмана — Бьюси. М.: Наука, 1982.
- [4] Галактическая и внегалактическая радиоастрономия. Под ред. Г. Л. Верскера, К. И. Келлермана. — М.: Мир. 1976.
- [5] *Гинзбург В.Л., Сыроватский С.И.* Современное состояние вопроса о происхождении космических лучей. *УФН*, 1960, **71**, 411.
- [6] *Гинзбург В.Л., Сыроватский С.И.* Происхождение космических лучей. М.: Изд-во АН СССР. 1963.
- [7] *Губанов В.С., Финкельштейн А.М., Фридман П.А.* Введение в радиоастрометрию. М.: Наука. 1983.
- [8] *Губанов В.С.* Обобщенный метод наименьших квадратов. Теория и применение в астрометрии. Санкт-Петербург.: Наука. 1997.
- [9] *Жаров В.Е.* Сферическая астрономия. — Фрязино: Век-2, 2006.
- [10] *Жаров В.Е., Сажин М.В., Семенов В.Н., Куимов К.В., Сажина О.С.* Физические причины вариации видимого положения квазаров. *Астрономический журнал.* 2009, том 86. с. 627-637.
- [11] *Зельдович Я.Б., Новиков И.Д.,* Строение и эволюция Вселенной. М.: Наука, 1975.
- [12] *Каплан С.А.* Элементарная радиоастрономия, М., 1966

- [13] *Каплан С.А., Пикельнер С.Б.* Физика межзвездной среды. М.: Наука, 1979.
- [14] *Ковалевский Ж.* Современная астрометрия. Фрязино: Век-2, 2004.
- [15] *Копейкин С.М.* Теория относительности в радиоастрономических наблюдениях. Астрон. журн. 1990, **67**, с. 10-20.
- [16] *Конникова В.К., Лехт Е.Е., Силантьев Н.А.* Практическая радиоастрономия, М: Изд-во Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова, 2011.
- [17] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. Изд. 4-е. М.: Наука, 1977.
- [18] *Краус Д.Д.* Радиоастрономия. М.: Советское радио, 1973.
- [19] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. Изд-е 6-е. М.: Наука, 1973.
- [20] *Манк У., Макдональд Г.* Вращение Земли. М.: Мир, 1964.
- [21] *Магнус Я.Р., Нейдеккер Х.* Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике. М.: Физматлит, 2002.
- [22] *Маррей К.Э.* Векторная астрометрия. — Киев: Наукова Думка, 1986.
- [23] *Матвеев Л.И., Кардашев Н.С., Шоломицкий Г.Б.* О радиоинтерферометре с большой базой. — Изв. ВУЗов. Радиофизика, т.8, 4, с.651-654, 1965.
- [24] *Матвеев Л.И.* История РСДБ — становление и развитие. Сообщения ИПА РАН. 2007, №176.
- [25] *Медведев Б.В.* Начала теоретической физики — М. Наука, 1977. 496 с.
- [26] *Мориц Г., Мюллер А.* Вращение Земли: теория и наблюдения. — Киев: Наукова Думка, 1992.
- [27] *Одуан К., Гино Б.* Измерение времени. Основы GPS. — М.: Техносфера, 2002.
- [28] <http://www.radioastron.ru/>

- [29] *Синицын И.Н.* Фильтры Калмана и Пугачева. М.: Университетская книга, Логос, 2006.
- [30] *Томпсон А.Р., Моран Д.М., Свенсон Д.У.* Интерферометрия и синтез в радиоастрономии, 2-е изд., М: Физматлит, 2003.
- [31] *Уоткинс Д.* Основы матричных вычислений. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.
- [32] *Христиансен У., Хёгбом И.* Радиотелескопы. — М.: Мир, 1972; 2-е изд., 1988.
- [33] *Чепмен С., Линдзен Р.* Атмосферные приливы: термические и гравитационные. М.: Мир, 1972.
- [34] Шкловский И.С. Астрон. ж. 1949, **26**, 10
- [35] Шкловский И.С. Космическое радиоизлучение. М. Гостехиздат, 1956.
- [36] *Alef, W.* A Review of VLBI Instrumentation. Proc. of the 7th Symposium of the European VLBI Network on New Developments in VLBI Science and Technology. Eds. R. Bachiller, F. Colomer, J.-F.; Desmurs, and P. de Vicente. Observatorio Astronomico Nacional of Spain, 2004, p.237-244 (arXiv:astro-ph/0412294)
- [37] *Alfven, H. and Herlofson, N.* Cosmic radiation and radio stars. Phys. Rev. 1959, **78**, 616.
- [38] *Z. Altamimi, X. Collilieux, J. Legrand, B. Garayt, C. Boucher* ITRF2005: A new release of the International Terrestrial Reference Frame based on time series of station positions and Earth Orientation Parameters, Journal of geophysical research, 2007, DOI: 10.1029/2007JB004949
- [39] *Z. Altamimi, X. Collilieux, L. Metivier* ITRF2008: an improved solution of the international terrestrial reference frame, Journal of geodesy, 2011, V. 85, 8, 457-473, DOI: 10.1007/s00190-011-0444-4
- [40] *Andrei, A. H.; Souchay, J.; Zacharias, N.; Smart, R. L.; Vieira Martins, R.; da Silva Neto, D. N.; Camargo, J. I. B.; Assafin, M.; Barache, C.; Bouquillon, S.; Penna, J. L.; Taris, F.* The large quasar reference frame (LQRF). An optical representation of the ICRS. Astronomy and Astrophysics, 2009, V. 505, Issue 1, 2009, pp.385-404

- [41] *Andreyanov, V. V.; Kardashev, N. S.; Popov, M. V.; Rudakov, V. A.; Sagdeev, R. Z.; Slysh, V. I.; Tsarevskij, G. S.* "Radioastron A radiointerferometer with an earth-space baseline. *Astronomicheskii Zhurnal*, 1986, vol. 63, p. 850-855.
- [42] *Argus, D. F.; Gordon, R. G.* No-net-rotation model of current plate velocities incorporating plate motion model NUVEL-1. *Geophysical Research Letters*, 1991, V. 18, pp. 2039-2042.
- [43] *Bare, C., Clark, B.G., Kellermann, K. I., Cohen, M. H. and Jauncey, D. L.* Interferometer Experiment with Independent Local Oscillators, *Science, New Series*, 1967, Vol. 157, No. 3785, pp. 189-191
- [44] *Begelman, M.C., Blandford, R.D., Rees, M.J.,* Theory of extragalactic radio sources. *Reviews of Modern Physics*, 1984, V. 56, Issue 2, pp.255-351.
- [45] *Blandford, R.D., Königl, A.,* Relativistic jets as compact radio sources. *Astrophysical Journal, Part 1*, 1979, V. 232, p.34-48.
- [46] *Blandford, R.D., Payne, D.G.,* Hydromagnetic flows from accretion discs and the production of radio jets. *MNRAS*, 1982, v. 199, p. 883-903
- [47] *Blandford, R.D., Znajek, R.L.,* Electromagnetic extraction of energy from Kerr black holes, *MNRAS* 179, 433 (1977)
- [48] *Bock, D. C.-J.; Large, M. I.; Sadler, Elaine M.* SUMSS: A Wide-Field Radio Imaging Survey of the Southern Sky. I. Science Goals, Survey Design, and Instrumentation. *The Astronomical Journal*, 1998, **117**, 1578-1593.
- [49] *Boehm, J., Werl, B., and Schuh, H.* Troposphere mapping functions for GPS and very long baseline interferometry from European Centre for Medium-Range Weather Forecasts operational analysis data. *J. Geophys. Res.*, 2006, V. 111, B02406, doi:10.1029/2005JB003629.
- [50] *Bolton, J.G. and Stanley, G.J.* Observations on the variable source radio-frequency radiation in the constellation Cygnus. *Australian J. Sci. res. Ser. A.*, 1948, **1**, 58
- [51] *Bourda, G.; Charlot, P.; Porcas, R. W.; Garrington, S. T.* VLBI observations of optically-bright extragalactic radio sources for the alignment of the radio frame with the future Gaia frame. I. Source detection. *Astronomy and Astrophysics*, 2010. V. 520, id.A113

- [52] *Briskin, W. F., Benson, J. M., Goss, W. M., Thorsett, S. E.* Very Long Baseline Array Measurement of Nine Pulsar Parallaxes. *The Astrophysical Journal*, 2002, V. 571, Issue 2, pp. 906-917.
- [53] *Broten, N. W.; Legg, T. H.; Locke, J. L.; McLeish, C. W.; Richards, R. S.; Chisholm, R. M.; Gush, H. P.; Yen, J. L.; Galt, J. A.* Long Base Line Interferometry: A New Technique. *Science*, 1967, **156**, Issue 3782, pp. 1592-1593
- [54] *Broten, N. W.; Legg, T. H.; Locke, J. L.; McLeish, C. W.; Richards, R. S.; Chisholm, R. M.; Gush, H. P.; Yen, J. L.; Galt, J. A.* Radio Interferometry with a Baseline of 3074 km. *Astronomical Journal*, 1967, **72**, p. 787-788
- [55] *Broten, N. W.* Early Days of Canadian Long-Baseline Interferometry. *Journal of the Royal Astronomical Society of Canada*, 1988, **82**, p.233-241
- [56] *Brumberg, V.A., Kopejkin, S.M.* Relativistic time scales in the Solar system. *Celest. Mech. and Dyn. Astron.*, 1990, **48**, 23-44.
- [57] *Campbell, R. M.* The EVN MkIV Data Processor at JIVE. Proc. of the 15th Workshop Meeting on European VLBI for Geodesy and Astrometry. Ed. by Dirk Behrend and Antonio Rius., 2001, p.40
- [58] *Campbell, J.; Schuh, H.; Zeppenfeld, G.* On the Computation of Group Delay Corrections Caused by Radio Source Structure. In *The Impact of VLBI on Astrophysics and Geophysics*. Proc. of the 129th IAU Symposium. Ed. by M. J. Reid and J. M. Moran. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1988, p.427-428
- [59] *Campbell, B.* e-VLBI and Other Developments at the EVN MarkIV Data Processor at JIVE. In *VLBI and the new generation of radio arrays*. Proc of the 10th European VLBI Network Symposium and EVN Users Meeting: September 20-24, 2010. Manchester, UK. (<http://pos.sissa.it/cgi-bin/reader/conf.cgi?confid=125>)
- [60] *Camenzind, M.* Compact Objects in Astrophysics: White Dwarfs, Neutron Stars and Black Holes. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2007
- [61] *Capitaine, N., Guinot, B., and Souchay, J.* A Non-rotating Origin on the Instantaneous Equator: Definition, Properties and Use. *Celest. Mech.*, 1986, **39**, pp. 283–307.

- [62] *Capitaine, N., Gontier, A.-M.* Accurate procedure for deriving UT1 at a submilliarcsecond accuracy from Greenwich Sidereal Time or from the stellar angle. *Astron. Astrophys.*, 1993, **275**, pp. 645-650.
- [63] *Capitaine, N., Guinot, B., and McCarthy, D. D.* Definition of the Celestial Ephemeris origin and of UT1 in the International Reference Frame. *Astron. Astrophys.*, 2000, **355**, pp. 398–405.
- [64] *Capitaine, N., Chapront, J., Lambert, S., and Wallace, P.* Expressions for the Celestial Intermediate Pole and Celestial Ephemeris Origin consistent with the IAU 2000A precession-nutation model. *Astron. Astrophys.*, 2003, 400(3), pp. 1145-1154, doi:10.1051/0004-6361:20030077
- [65] *Capitaine, N., Wallace, P. T., and McCarthy, D. D.* Expressions to implement the IAU 2000 definition of UT1. *Astron. Astrophys.*, 2003, 406(3), pp. 1135-1149, doi:10.1051/0004-6361:20030817
- [66] *Carlson, B. R.; Dewdney, P. E.; Burgess, T. A.; Casorso, R. V.; Petrachenko, W. T.; Cannon, W. H.* The S2 VLBI Correlator: A Correlator for Space VLBI and Geodetic Signal Processing. *Publ. of the Astronomical Society of the Pacific*, 1999, V. 111, Issue 762, pp. 1025-1047.
- [67] *Charlot, P.; Lestrade, J.-F.; Boucher, C.* Radio Source Structures in VLBI Astrometry. In *The Earth's Rotation and Reference Frames for Geodesy and Geodynamics*. Proc. of the 128th Symposium of the International Astronomical Union, held in Coolfont, West Virginia, U.S.A., 20-24 October 1986. Edited by Alice Kay Babcock and George Alan Wilkins. International Astronomical Union. Symposium no. 128, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht., 1988, p.91-96.
- [68] *Charlot, P.* Radio-source structure in astrometric and geodetic very long baseline interferometry. *Astron. Journal*, 1990, vol. 99, p. 1309-1326.
- [69] *Charlot, P., Pradel, N., Lestrade, J.-F.* Phase-Referenced VLBI Astrometry of Compact Symmetric Objects. In *Future Directions in High Resolution Astronomy*, ed. J. D. Romney, M. J. Reid, ASP Conf. Ser., 2005 340, 511)
- [70] *Charlot, P.; Boboltz, D. A.; Fey, A. L.; Fomalont, E. B.; Geldzahler, B. J.; Gordon, D.; Jacobs, C. S.; Lanyi, G. E.; Ma, C.; Naudet, C. J.; Romney, J. D.; Sovers, O. J.; Zhang, L. D.* The Celestial Reference Frame at 24 and 43

- GHz. II. Imaging. *The Astronomical Journal*, Volume 139, Issue 5, pp. 1713-1770 (2010).
- [71] *Chen, G. and Herring, T. H.*, Effects of atmospheric azimuthal asymmetry on the analysis of space geodetic data, *J. Geophys. Res.* 1997, V.102, pp. 20,489-20,502.
- [72] *Cheung, A. C.; Rank, D. M.; Townes, C. H.* Detection of Water in Interstellar Regions by its Microwave Radiation. *Nature*, 1969, V. 221, Issue 5181, pp.626-628.
- [73] *Clark, B. G.; Kellermann, K. I.; Bare, C. C.; Cohen, M. H.; Jauncey, D. L.* Radio Interferometry Using a Base Line of 20 Million Wavelengths. *Astrophysical Journal*, 1968, vol. 153, p.L67
- [74] *Clark, B. G.; Broderick, J. J.; Efanov, V. A.; Kellermann, K. I.; Cohen, M. H.; Kogan, L. R.; Kostenko, V. I.; Matveenko, L. I.; Moiseev, I. G.; Mukhina, M. M.; Shteinshleiger, V. B.; Jauncey, D. L.* Observations of Compact Radio-Emitting Objects at 3.55 cm with Maximum Angular Resolution. *Astronomicheskii Zhurnal*, 1972, Vol. 49, p.700
- [75] *Clark, B. G.* The NRAO tape-recorder interferometer system. *Proc. IEEE*, 1973, Vol. 61, p. 1242 - 1248
- [76] *Clark, B. G.* Coherence in radio astronomy. In *Synthesis Imaging in Radio Astronomy II*. Ed. by G. B. Taylor, C. L. Carilli, and R. A. Perley. ASP Conference Series. 1999, V.180, pp.1-10.
- [77] *Coates, R.J., Clark, T.A., Counselman III, C.C., Shapiro, I.I., Hinteregger, H.F., Rogers, A.E., Whitney, A.R.* Very Long Baseline Interferometry for centimeter accuracy geodetic measurements. *Tectonophysics*, 1975, V. 29, pp. 9-18
- [78] *Condon, J.J., Cotton, W. D., Greisen, E. W., Yin, Q. F., Perley, R. A., Taylor, G. B., Broderick, J. J.* The NRAO VLA Sky Survey. *AJ*, 1998, **115**, 1693-1716
- [79] *Crane, P. C., Napier, P. J.* Sensitivity. In *Synthesis imaging in radio astronomy*, A collection of Lectures from the Third NRAO Synthesis Imaging Summer School, edited by Richard A. Perley, Frederic R. Schwab, and Alan H. Bridle. Published by the Astronomical Society of the Pacific, 1989, vol. 6, San Francisco, CA, p. 139-165.

- [80] *Davis, J. L., Herring, T. A., Shapiro, I. I., Rogers, A. E. E., and Elgered, G.* Geodesy by radio interferometry: effects of atmospheric modeling errors on estimates of baseline length. *Radio Sci.*, 1985, 20(6), pp. 1593-1607, doi: 10.1029/RS020i006p01593.
- [81] *Dehant, V., Arias, F., Bizouard, Ch., Bretagnon, P., Brzeziński, A., Buffett, B., Capitaine, N., Defraigne, P., de Viron, O., Feissel, M., Fliegel, H., Forte, A., Gambis, D., Getino, J., Gross, R., Herring, T., Kinoshita, H., Klioner, S., Mathews, P. M., McCarthy, D., Moisson, X., Petrov, S., Ponte, R. M., Roosbeek, F., Salstein, D., Schuh, H., Seidelmann, K., Soffel, M., Souchay, J., Vondrák, J., Wahr, J. M., Weber, R., Williams, J., Yatskiy, Y., Zharov, V.E., and Zhu, S.Y.* Considerations concerning the non-rigid Earth nutation theory. *Celest. Mech. and Dyn. Astron.*, 1999, **72**, 245–310.
- [82] *Deller A.T., Tingay S.J., Bailes M., West C.* DiFX: a software correlator for very long baseline interferometry using multiprocessor computing environments. *PASP*, 2006, v.119, pp. 318–336
- [83] *Deller, A. T.; Tingay, S. J.; Bailes, M.; Reynolds, J. E.* Precision Southern Hemisphere VLBI Pulsar Astrometry. II. Measurement of Seven Parallaxes. *The Astrophysical Journal*, 2009, V. 701, Issue 2, pp. 1243-1257.
- [84] *Deller, A. T.* Precision VLBI astrometry: Instrumentation, algorithms and pulsar parallax determination. PhD Thesis, Swinburne University, 2009. arXiv:0902.1000
- [85] *Doi, Akihiro; Fujisawa, K.; Harada, K.; Nagayama, T.; Suematsu, K.; Sugiyama, K.; Habe, A.; Honma, M.; Kawaguchi, N.; Kobayashi, H.; Koyama, Y.; Murata, Y.; Omodaka, T.; Sorai, K.; Sudou, H.; Takaba, H.; Takashima, K.; Wakamatsu, K.* Japanese VLBI Network. Proc. of the 8th European VLBI Network Symposium. September 26-29, 2006, Torun, Poland. Eds. B. Willem, B. Rafael, B. Roy, etc., p.71. arXiv:astro-ph/0612528
- [86] *Doi, Akihiro; Fujisawa, Kenta; Honma, Mareki; Sugiyama, Koichiro; Murata, Yasuhiro; Mochizuki, Nanako; Isono, Yasuko* Japanese VLBI network observations of 6.7-GHz methanol masers I. Array. In *Astrophysical Masers and their Environments*, Proc. of the International Astronomical Union, IAU Symposium, 2007, V. 242, p. 148-149

- [87] *Duxbury, T. C.; Callahan, J. D.* PHOBOS and Deimos astrometric observations from Mariner 9. *Astronomy and Astrophysics*, vol. 216, 1989, N. 1-2, p. 284-293.
- [88] *Edge, D. O.; Shakeshaft, J. R.; McAdam, W. B.; Baldwin, J. E.; Archer, S.* A survey of radio sources at a frequency of 159 Mc/s, *Mem. R. Astron. Soc.*, 1959, V.68, p.37-60.
- [89] <http://www.evlbi.org/>
- [90] *Ewen, H.I. and Purcell, E.M.* Radiation from Galactic hydrogen at 1420 Mc/s. *Nature*, 1951, **168**, 356-357
- [91] *Fairhead, L. and Bretagnon, P.* An analytical formula for the time transformation TB-TT. *Astron. Astrophys.*, 1990, V. 229(1), pp. 240-247.
- [92] *Farrell, W. E.* Deformation of the Earth by Surface Loads. *Rev. Geophys. Space Phys.*, 1972, V.10, pp. 761–797.
- [93] *Ferreira, J.; Pelletier, G.* Magnetized accretion-ejection structures. 1. General statements. *Astronomy and Astrophysics*, Vol. 276, p. 625-636 (1993)
- [94] *Fey, A. L.; Ma, C.; Arias, E. F.; Charlot, P.; Feissel-Vernier, M.; Gontier, A.-M.; Jacobs, C. S.; Li, J.; MacMillan, D. S.* The Second Extension of the International Celestial Reference Frame: ICRF-EXT.1. *The Astronomical Journal*, 2004, V. 127, Issue 6, pp. 3587-3608.
- [95] *Finkelstein, A.; Ipatov, A.; Smolentsev, S.* The Russian VLBI Network Quasar: from 2006 to 2011. *Proc. of the 9th European VLBI Network Symposium on The role of VLBI in the Golden Age for Radio Astronomy and EVN Users Meeting*. September 23-26, 2008. Bologna, Italy. Online at <http://pos.sissa.it/cgi-bin/reader/conf.cgi?confid=72>, p.53
- [96] *Fomalont, E.* Astrometry: VLBI techniques. In *Very Long Baseline Interferometry and the VLBA*. Ed. by J.A. Zensus, P.J. Diamond, and P.J. Napier. NRAO Workshop No. 22, Astronomical Society of the Pacific Conference Series (ASPC), 1995, Volume 82. p.363-394
- [97] *Fomalont, E. B.; Kopeikin, S. M.* The Measurement of the Light Deflection from Jupiter: Experimental Results. *The Astrophysical Journal*, 2003, V. 598, Issue 1, pp. 704-711.

- [98] *Garrett M.A.* Ground based VLBI facilities: the european and global VLBI network. In F. Mantovani and A. Kus (eds.), *The Role of VLBI in Astrophysics, Astrometry and Geodesy*, NATO Science Series. Series II: Mathematics, Physics and Chemistry. 2004, V. 135, 403–413. Kluwer Academic Publishers.
- [99] *Gordon, D.* CALC: the next upgrade. In: Vandenberg NR, Baver KD (eds) *International VLBI service for Geodesy and Astrometry 2004 general meeting proceedings*. Ottawa, Canada, February 9–11, 2004. NASA/CP-2004-212255, pp 265–265
- [100] *Gross, R. S.* Ocean tidal effects on Earth rotation. *J. Geodyn.*, 2009, v. 48, pp. 219-225.
- [101] *Guinot, B.*, Basic Problems in the Kinematics of the Rotation of the Earth,"in *Time and the Earth's Rotation*, McCarthy, D. D. and Pilkington, J. D. (eds.), D. Reidel Publishing Company, 1979, pp. 7-18.
- [102] *Guirado, J. C.; Marcaide, J. M.; Alberdi, A.; Elosegui, P.; Ratner, M. I.; Shapiro, I. I.; Kilger, R.; Mantovani, F.; Venturi, T.; Rius, A.; Ros, E.; Trigilio, C.; Whitney, A. R.* Proper Motion of Components in 4C 39.25. *Astronomical Journal*, 1995, v.110, pp.2586-2596
- [103] *Guo, Li; Zheng, Xingwu; Zhang, Bo; Wang, Weihua; Zheng, Weimin; Shu, Fengchun; Li, Jinling; Yu, Yun; Hao, Longfei; Yuan, Jianping; Xia, Bo*New determination of the position of the pulsar B0329+54 with Chinese VLBI network. *Science China Physics, Mechanics and Astronomy*, 2010, V. 53, Issue 8, pp.1559-1564
- [104] *Haas, R.* Analysis strategies and software for geodetic VLBI. Proc. of the 7th Symposium of the European VLBI Network on New Developments in VLBI Science and Technology. Held in Toledo (Spain) on October 12-15 2004. Ed. by R. Bachiller, F. Colomer, J.-F.; Desmurs, and P. de Vicente. Observatorio Astronomico Nacional of Spain, 2004, p.297-302 (arXiv:astro-ph/0412469v1)
- [105] *Hazard, C., M.B. Mackey, and A.J. Shimmins.* Investigation of the Radio Source 3C 273 By The Method of Lunar Occultations. *Nature* 1963. V. 197, Issue 4872, pp. 1037-1039
- [106] *Hellings, R.W* Relativistic effects in astronomical timing measurements. *Astron. Journal.*, 1986, **91**, 650-659.

- [107] *Herrnstein, J.R., Moran, J.M., Greenhill, L.J., Diamond, P.J., Inoue, M., Nakai, N., Miyoshi, M., Henkel, C. and Riess, A.* A geometric distance to the galaxy NGC4258 from orbital motions in a nuclear gas disk. *Nature*, 1999, v.400, pp.539-541
- [108] *Hey, J.S., Parsons, S.J. and Phillips, J.W.* Fluctuations in cosmic radiation at radio frequencies. *Nature*. 1946. **158**, 234.
- [109] *Hinteregger, H. F., Ergas, R., Knight, C. A., Robertson, D. S., Shapiro, I. I., Whitney, A. R., Rogers, A. E. E., Clark, T. A.* Precision Geodesy Via Radio Interferometry: First Results. *Bulletin of the American Astronomical Society*, 1971, Vol. 3, p.467
- [110] *Hinteregger, H. F., Shapiro, I. I., Robertson, D. S., Knight, C. A., Ergas, R. A., Whitney, A. R., Rogers, A. E. E., Moran, J. M., Clark, T. A. and Burke, B. F.* Precision Geodesy via Radio Interferometry. *Science, New Series*, 1972, Vol. 178, No. 4059, pp. 396-398
- [111] *Hoffmann-Wellenhof B., Lichtenegger H., Wasle E.* GNSS – Global Navigation Satellite Systems: GPS, GLONASS, Galileo and more. Springer-Verlag Wien, 2008.
- [112] *Van de Hulst, H.C.* Radio waves from space. *Ned. Tijdschr. Natuurk*, 1945, **11**, 201-221.
- [113] IERS Annual Report 2007. Edited by Wolfgang R. Dick and Bernd Richter. International Earth Rotation and Reference Systems Service, Central Bureau. Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, 2009. 220 p.,
- [114] IERS Conventions (1996). Ed. by D.D.McCarthy, IERS Technical Note 21. Observatoire de Paris. 1996. 96 p.
- [115] IERS Conventions (2003). D.D.McCarthy and G.Pétit (eds.), IERS Technical Note 32. U.S.Naval Observatory, Bureau International des Poids et Mesures. 2004.
- [116] IERS Conventions (2010). G.Pétit and B. Luzum (eds.), IERS Technical Note 36. Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie Frankfurt am Main. 2010.
- [117] Handbook. Radio Astronomy. 2-d edition. Radiocommunication Bureau. Geneva. 2003. 123 p.

- [118] <http://ivscc.gsfc.nasa.gov/>
- [119] International VLBI Service for Geodesy and Astrometry 2010 Annual Report, edited by D. Behrend and K. Baver, NASA/TP-2011-215880, 2011. (<http://ivscc.gsfc.nasa.gov/publications/ar2010/index.html>)
- [120] *Jacobs, C. S.; Sovers, O. J.* X/Ka-band Global Astrometric Results. 19th European VLBI for Geodesy and Astrometry Working Meeting, held in Bordeaux, France, March 24-25, 2009, Eds: G. Bourda, P. Charlot, and A. Collioud, Universite Bordeaux 1 - CNRS, Observatoire Aquitain des Sciences de l'Univers, Laboratoire d'Astrophysique de Bordeaux, p. 9-13.
- [121] *Jansky, K.G.* A note on the source of interstellar interference. Proc. IRE. 1935. **23**, 1158-1163.
- [122] *Jarosik, N.; Bennett, C. L.; Dunkley, J.; Gold, B.; Greason, M. R.; Halpern, M.; Hill, R. S.; Hinshaw, G.; Kogut, A.; Komatsu, E.; Larson, D.; Limon, M.; Meyer, S. S.; Nolte, M. R.; Odegard, N.; Page, L.; Smith, K. M.; Spergel, D. N.; Tucker, G. S.; Weiland, J. L.; Wollack, E.; Wright, E. L.* Seven-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Sky Maps, Systematic Errors, and Basic Results. The Astrophysical Journal Supplement, Volume 192, Issue 2, article id. 14 (2011).
- [123] *Jester, S.; Harris, D. E.; Marshall, H. L.; Meisenheimer, K.* New Chandra Observations of the Jet in 3C 273. I. Softer X-Ray than Radio Spectra and the X-Ray Emission Mechanism. The Astrophys. J., 2006, V. 648, Issue 2, pp. 900-909.
- [124] <http://www.jive.nl/>
- [125] *Jones, D. L., Fomalont, E., Dhawan, V., Romney, J., Folkner, W. M., Lanyi, G., Border, J., Jacobson, R.* Astrometric Observations of Cassini with the VLBA. The Astronomical Journal, 2011, V. 141, Issue 2, article id. 29 (arXiv:1012.0264v1).
- [126] *Jorstad, Svetlana G.; Marscher, Alan P.; Lister, Matthew L.; Stirling, Alastair M.; Cawthorne, Timothy V.; Gear, Walter K.; Gomez, Jose L.; Stevens, Jason A.; Smith, Paul S.; Forster, James R.; Robson, E. Ian* Polarimetric Observations of 15 Active Galactic Nuclei at High Frequencies: Jet Kinematics from Bimonthly Monitoring with the Very Long Baseline Array. The Astronomical Journal, 2005, Volume 130, Issue 4, pp. 1418-1465.

- [127] *Kellermann, K. I.; Clark, B. G.; Bare, C. C.; Rydbeck, O.; Ellder, J.; Hansson, B.; Kollberg, E.; Hoglund, B.; Cohen, M. H.; Jauncey, D. L.* High-Resolution Interferometry of Small Radio Sources Using Intercontinental Base Lines. *Astrophysical Journal*, 1968, vol. 153, p.L209-L214
- [128] *Kellermann, K. I.; Vermeulen, R. C.; Zensus, J. A.; Cohen, M. H.* Sub-Milliarcsecond Imaging of Quasars and Active Galactic Nuclei. *The Astronomical Journal*, 1998, Volume 115, Issue 4, pp. 1295-1318.
- [129] *Kellermann, K. I., Moran, J. M.* The development of high-resolution imaging in radio astronomy. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 2001. Vol. 39, pp. 457-509
- [130] *Kellermann, K. I.; Lister, M. L.; Homan, D. C.; Vermeulen, R. C.; Cohen, M. H.; Ros, E.; Kadler, M.; Zensus, J. A.; Kovalev, Y. Y.* Sub-Milliarcsecond Imaging of Quasars and Active Galactic Nuclei. III. Kinematics of Parsec-scale Radio Jets. *The Astrophys. J.*, 2004, V.609, Issue 2, p.539-563.
- [131] *Kikuchi, F.; Liu, Q.; Hanada, H.; Kawano, N.; Matsumoto, K.; Iwata, T.; Goossens, S.; Asari, K.; Ishihara, Y.; Tsuruta, S.; Ishikawa, T.; Noda, H.; Namiki, N.; Petrova, N.; Harada, Y.; Ping, J.; Sasaki, S.* Picosecond accuracy VLBI of the two subsatellites of SELENE (KAGUYA) using multifrequency and same beam methods. *Radio Science*, 2009, Volume 44, Issue 2, CiteID RS2008.
- [132] *Klioner, S. A.* General relativistic model of VLBI observables,"in *Proc. AGU Chapman Conf. on Geodetic VLBI: Monitoring Global Change*, Carter, W. E. (ed.), NOAA Technical Report NOS 137 NGS 49, American Geophysical Union, Washington D.C, 1991, pp. 188-202.
- [133] *Knight, C. A., Robertson, D. S., Rogers, A. E. E., Shapiro, I. I., Whitney, A. R., Clark, T. A., Goldstein, R. M., Marandino, G. E., Vandenberg, N. R.* Quasars: Millisecond-of-Arc Structure Revealed by Very-Long-Baseline Interferometry. *Science, New Series*, 1971, Vol. 172, No. 3978, pp. 52-54
- [134] *Kobayashi, H.; Sasao, T.; Kawaguchi, N.; Manabe, S.; Omodaka, T.; Kameya, O.; Shibata, K. M.; Miyaji, T.; Honma, M.; Tamura, Y.; Hirota, T.; Kuji, S.; Horiai, K.; Sakai, S.; Sato, K.; Iwadate, K.; Kanya, Y.; Ujihara, H.; Jike, T.; Fujii, T.; Motiduki, N.; Oyama, T.; Kurayama, H.; Kamohara, R.; Suda, H.; Kasuga, T.* VERA: A New VLBI Instrument Free from the Atmosphere. In *New technologies in VLBI*. Proc. of a symposium

- of the International VLBI Service for Geodesy and Astrometry held in Gyeong-ju, Korea, 5-8 November 2002. Edited by Y.C. Minh. ASP Conference Series, Vol. 306. San Francisco, CA: Astronomical Society of the Pacific, 2003., p.367-371
- [135] *Kondo, T.; Koyama, Y.; Nakajima, J.; Sekido, M.; Ichikawa, R.; Kawai, E.; Okubo, H.; Osaki, H.; Kimura, M.; Ichikawa, Y.* Real-time Gigabit VLBI System and Internet VLBI System. International VLBI Service for Geodesy and Astrometry: General Meeting Proc., 2002, p.142
- [136] *Kopeikin, S. M.; Fomalont, E. B.* Aberration and the Fundamental Speed of Gravity in the Jovian Deflection Experiment. Foundations of Physics, 2006, Vol. 36, p. 1244-1285
- [137] *Kopeikin, S. M.; Fomalont, E. B.* Gravimagnetism, causality, and aberration of gravity in the gravitational light-ray deflection experiments. General Relativity and Gravitation, 2007, Volume 39, Issue 10, pp.1583-1624
- [138] *Kovalev, Y. Y.; Kellermann, K. I.; Lister, M. L.; Homan, D. C.; Vermeulen, R. C.; Cohen, M. H.; Ros, E.; Kadler, M.; Lobanov, A. P.; Zensus, J. A.; Kardashev, N. S.; Gurvits, L. I.; Aller, M. F.; Aller, H. D.* Sub-Milliarcsecond Imaging of Quasars and Active Galactic Nuclei. IV. Fine-Scale Structure. The Astronom. J., 2005, V. 130, Issue 6, p.2473-2505.
- [139] *Kovalev, Y. Y.; Lobanov, A. P.; Pushkarev, A. B.; Zensus, J. A.* Opacity in compact extragalactic radio sources and its effect on astrophysical and astrometric studies. Astronomy and Astrophysics, V. 483, Issue 3, 2008, pp.759-768
- [140] *Lang, K.* Astrophysical Formulae, Chap. I, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. 1980
- [141] [http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/map/current/params/lcdm\\_sz\\_lens\\_wmap7\\_bao\\_h0.cfm](http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/map/current/params/lcdm_sz_lens_wmap7_bao_h0.cfm)
- [142] *van Langvelde, H. J.* The Future of the European VLBI Network. 2009. arXiv:0903.4469
- [143] *Lanyi, G. E.; Boboltz, D. A.; Charlot, P.; Fey, A. L.; Fomalont, E. B.; Geldzahler, B. J.; Gordon, D.; Jacobs, C. S.; Ma, C.; Naudet, C. J.; Romney, J. D.; Sovers, O. J.; Zhang, L. D.* The Celestial Reference Frame at 24 and

- 43 GHz. I. Astrometry. *The Astronomical Journal*, 2010, V. 139, Issue 5, pp. 1695-1712.
- [144] *Lanyi, G., Bagri, D. S. Border, J.* Angular Position Determination of Spacecraft by Radio Interferometry. *Proc. IEEE*, 2007, v. 95, p.2193-2201
- [145] *Lara, L.; Marcaide, J. M.; Alberdi, A.; Guirado, J. C.* VLBI differential astrometry at large angular separation: 3C 395 – 3C 382. *Astronomy and Astrophysics*, 1996, v.314, p.672-678
- [146] *Leahy J.P., Bridle A.H., and Strom R.G.*, 1999, <http://www.jb.man.ac.uk/atlas/>
- [147] *Lebreton, Jean-Pierre; Witasse, Olivier; Sollazzo, Claudio; Blancquaert, Thierry; Couzin, Patrice; Schipper, Anne-Marie; Jones, Jeremy B.; Matson, Dennis L.; Gurvits, Leonid I.; Atkinson, David H.; Kazeminejad, Bobby; Perez-Ayucar, Miguel* An overview of the descent and landing of the Huygens probe on Titan. *Nature*, 2005, V. 438, Issue 7069, pp. 758-764.
- [148] *Lestrade, J.-F.; Rogers, A. E. E.; Whitney, A. R.; Niell, A. E.; Phillips, R. B.; Preston, R. A.* Phase-referenced VLBI observations of weak radio sources - Milliarcsecond position of Algol. *Astronomical Journal*, 1990, vol. 99, May 1990, p. 1663-1673.
- [149] *Lestrade, J.-F., Jones, D. L., Preston, R. A., Phillips, R. B.* High-precision VLBI astrometric observations of radio-emitting stars for detection of extra-solar planets. *Astrophysics and Space Science*, 1994, 212, 251-260
- [150] *Lieske, J. H., Lederle, T., Fricke, W., and Morando, B.* Expressions for the Precession Quantities Based upon the IAU(1976) System of Astronomical Constants. *Astron. Astrophys.*, 1977, V.58(1-2), pp. 1-16.
- [151] *Liu, Qinghui; Chen, Ming; Xiong, Weiming; Qian, Zhihan; Li, Jinling; Hao, Wanghong; Wang, Guangli; Zheng, Weimin; Guan, Di; Zhu, Renjie; Wang, Weihua; Zhang, Xiuzhong; Jiang, Dongrong; Shu, Fengchun; Ping, Jinsong; Hong, Xiaoyu* Relative position determination of a lunar rover using high-accuracy multi-frequency same-beam VLBI. *Science China Physics, Mechanics and Astronomy*, 2010, V. 53, Issue 3, pp.571-578
- [152] *Lobanov, A. P.* Ultracompact jets in active galactic nuclei. *Astron. Astrophys.* 330, 79–89 (1998)

- [153] *Lovas, F.J.* Recommended rest frequencies for observed interstellar molecular microwave transitions — 1991 revision. *J. phys. and Chem. Ref. Data.* 1992, **21**, 181-272.
- [154] *Lovelace, R. V. E.; Wang, J. C. L.; Sulkanen, M. E.* Self-collimated electromagnetic jets from magnetized accretion disks. *Astrophysical Journal*, 1987, vol. 315, p. 504-535.
- [155] *Ly, C., Walker, R. C., Wrobel, J. M.* An Attempt to Probe the Radio Jet Collimation Regions in NGC 4278, NGC 4374 (M84), and NGC 6166. *The Astronomical Journal*, 2004, V. 127, Issue 1, pp. 119-124.
- [156] *Ma, C.; Clark, T. A.; Ryan, J. W.; Herring, T. A.; Shapiro, I. I.; Corey, B. E.; Hinteregger, H. F.; Rogers, A. E. E.; Whitney, A. R.; Knight, C. A.; Lundqvist, G. L.; Shaffer, D. B.; Vandenberg, N. R.; Pigg, J. C.; Schupler, B. R.; Ronnang, B. O.* Radio-source positions from VLBI. *Astron. J.* 1986, vol. 92, p. 1020-1029.
- [157] *Ma, C., Arias, E. F., Eubanks, T. M., Fey, A., Gontier, A.-M., Jacobs, C. S., Sovers, O. J., Archinal, B. A., and Charlot, P.* The International Celestial Reference Frame as realized By Very Long Baseline Interferometry. *Astron. Astrophys.*, 1998, **116**, 516–546.
- [158] *Ma, C.; Arias, E. F.; Bianco, G.; Boboltz, D. A.; Bolotin, S. L.; Charlot, P.; Engelhardt, G.; Fey, A. L.; Gaume, R. A.; Gontier, A.-M.; Heinkelmann, R.; Jacobs, C. S.; Kurdubov, S.; Lambert, S. B.; Malkin, Z. M.; Nothnagel, A.; Petrov, L.; Skurikhina, E.; Sokolova, J. R.; Souchay, J.; Sovers, O. J.; Tesmer, V.; Titov, O. A.; Wang, G.; Zharov, V. E.; Barache, C.; Boeckmann, S.; Collioud, A.; Gipson, J. M.; Gordon, D.; Lytoyn, S. O.; MacMillan, D. S.; Ojha, R.* The Second Realization of the International Celestial Reference Frame by Very Long Baseline Interferometry. Alan Fey, David Gordon, and Christopher S. Jacobs (eds.). (IERS Technical Note No. 35) Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts fur Kartographie und Geodasie, 2009.
- [159] *MacMillan, D. S.* Atmospheric gradients from very long baseline interferometry observations. *Geophys. Res. Lett.* 1995, V. 22, pp. 1041–1044.
- [160] *Mathews, P. M., Herring, T. A., and Buffett B. A.* Modeling of nutation and precession: New nutation series for nonrigid Earth, and insights into the Earth's Interior. *J. Geophys. Res.*, 2002, 107(B4), doi: 10.1029/2001JB000390.

- [161] *Marcaide, J. M.; Shapiro, I. I.* VLBI study of 1038 + 528 A and B - Discovery of wavelength dependence of peak brightness location. *Astrophysical Journal*, 1984, Part 1, vol. 276, pp. 56-59.
- [162] *Meeks, M. L.; Carter, J. C.; Barrett, A. H.; Schwartz, P. R.; Waters, J. W.; Brown, W. E., III* Water Vapor: Observations of Galactic Sources. *Science*, 1969, V. 165, Issue 3889, pp.180-184.
- [163] *J. M. Moran, P. P. Crowther, B. F. Burke, A. H. Barrett, A. E. E. Rogers, J. A. Ball, J. C. Carter, and C. C. Bare* Spectral Line Interferometry with Independent Time Standards at Stations Separated by 845 Kilometers. *Science*, 1967, **157**, pp. 676 - 677
- [164] *Moran, J. M.* Very long baseline interferometric observations and data reduction. In *Methods of experimental physics*. 1976, Vol. 12C. Ed. M. L. Meeks. Academic Press, New York, pp. 228-260
- [165] *Moran, J. M.* Very long baseline interferometer systems. *Methods of experimental physics*. 1976, Vol. 12C. Ed. M. L. Meeks. Academic Press, New York, pp. 174-197
- [166] *Napier, P. J., Bagri, D. S., Clark, B. G., Rogers A. E. E., Romney, J. D., Thompson, A. R. Walker, R. C.* The Very Long Baseline Array, *Proc. IEEE*, 1994, 82, p. 658-672
- [167] *Niell, A. E.* Global mapping functions for the atmosphere delay of radio wavelengths. *J. Geophys. Res.*, 1996, V. 101(B2), pp. 3227-3246, doi: 10.1029/95JB03048.
- [168] *Nothnagel, A., Pilhatsch, M., and Haas, R.* Investigations of Thermal Height Changes of Geodetic VLBI Radio Telescopes. In *Proceedings of the 10th Working Meeting on European VLBI for Geodesy and Astrometry*, Lanotte, R. and Bianco, G. (eds.), Matera, 1995, pp. 121–133.
- [169] *Nothnagel, A.* Conventions on thermal expansion modelling of radio telescopes for geodetic and astrometric VLBI. *J. Geod.*, 2009, V. 83, pp.787–792, DOI 10.1007/s00190-008-0284-z
- [170] *Nyquist, H.* Thermal agitation of electric charge in conductors. *Phys. Rev.* 1928, V. 32, pp.110-113.
- [171] *Perkins, F.; Gold, T.; Salpeter, E. E.* Maser Action in Interstellar OH. *Astrophys. J.*, 1966, V. 145, p.361.

- [172] *Petit, G.; Fayard, T.* A Programmable VLBI Correlator Using Parallel Computing. VLBI TECHNOLOGY: Progress and Future Observational Possibilities. Proceedings of the International Symposium Held at Kyoto International Conference Hall on September 6-10, 1993. Edited by Tetsuo Sasao, Seiji Manabe, Osamu Kameya and Makoto Inoue. Terra Scientific Publishing Company, Tokyo, 1994. p.332-337
- [173] *Petrachenko, B.; Niell, A.; Behrend, D.; Corey, B.; Boehm, J.; Charlot, P.; Collioud, A.; Gipson, J.; Haas, R.; Hobiger, T.; Koyama, Y.; MacMillan, D.; Malkin, Z.; Nilsson, T.; Pany, A.; Tuccari, G.; Whitney, A.; Wresnik, J.* Design Aspects of the VLBI2010 System. Progress Report of the IVS VLBI2010 Committee. NASA/TM-2009-214180, 2009,
- [174] *Petrov, L.; Gordon, D.; Gipson, J.; MacMillan, D.; Ma, C.; Fomalont, E.; Walker, R. C.; Carabajal, Cl.* Precise geodesy with the Very Long Baseline Array. Journal of Geodesy, 2009, Volume 83, Issue 9, pp.859-876.
- [175] *Pilkington, J. D. H.; Scott, P. F.* A survey of radio sources between declinations 20° and 40°, Memoirs of the Royal Astronomical Society, 1965, V. 69, p.183
- [176] *Pogrebenko, Sergei; Gurvits, Leonid; Avruch, Ian; Cimo, Giuseppe; Huygens VLBI Tracking Team* VLBI experiment with the Huygens Probe during its descent in the atmosphere of Titan: an evidence for meridional wind. EGU General Assembly 2010, held 2-7 May, 2010 in Vienna, Austria, p.6691
- [177] *Porcas, R. W.* Radio astrometry with chromatic AGN core positions. Astronomy and Astrophysics, Volume 505, Issue 1, 2009, pp.L1-L4
- [178] *Pradel, N., Charlot, P. Lestrade, J.-F.* Astrometric Accuracy of Phase-referenced Observations with the VLBA and EVN, Astron. Astrophys., 2006, v. 452, p.1099-1106
- [179] *Preston, R. A., Ergas, R., Hinteregger, H. F., Knight, C. A., Robertson, D. S., Shapiro, I. I., Whitney, A. R., Rogers, A. E. E., Clark, T. A.* Interferometric Observations of an Artificial Satellite. Science, New Series, 1972, Vol. 178, No. 4059, pp. 407-409
- [180] *Preston, R. A.; Ellis, J.; Finley, S. G.; Hildebrand, C. E.; Purcell, G. H.; Stelzried, C. T.; Sagdeev, R. Z.; Linkin, V. M.; Kerzhanovich, V. V.; Kogan, L. R.; Kostenko, V. I.; Matveenko, L. I.; Nasirov, R. R.; Pogrebenko, S.*

- V.; Strukov, I. A.; Blamont, J. E.; Armand, N.; Alexandrov, Yu. N.; Boloh, L.; Laurans, G.; Petit, G.; Bogomolov, A. F.; Moiseev, I. G.; Biraud, F.; Boischot, A.; Ortega-Molina, A.; Rosolen, C.; Kaufmann, P. Solar System VLBI Astrometry: the Venus Ballon Experiment. In *The Impact of VLBI on Astrophysics and Geophysics*. Proc. of the 129th IAU Symposium, Cambridge, MA, May 10-15, 1987. Ed. by Mark Jonathan Reid and James M. Moran. Kluwer Academic Publishers, 1988, p.319
- [181] Ray, R. D.; Steinberg, D. J.; Chao, B. F.; Cartwright, D. E. Diurnal and Semidiurnal Variations in the Earth's Rotation Rate Induced by Oceanic Tides. *Science*, 1994, V.e 264, Issue 5160, pp. 830-832
- [182] Reber G. *Cosmic Static*. *Astrophys. J.*, 1940, V.91, pp.621-624.
- [183] Reber G. *Cosmic Static*, *Astrophys. J.*, 1944, V.100, pp.279-287.
- [184] Reber G. *Cosmic Static*, *Proc. IRE*, 1948, V.36, pp.1215-1218.
- [185] Rogers, Alan E. E. Very long baseline interferometry with large effective bandwidth for phase-delay measurements. *Radio Science*, 1970, Vol. 5, p.1239-1247.
- [186] Rogers, A. E. E.; Moran, J. M., Jr. Coherence limits for very-long-baseline interferometry. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 1981, V. IM-30, pp. 283-286.
- [187] Rogers, A. E. E.; Cappallo, R. J.; Hinteregger, H. F.; Levine, J. I.; Nesman, E. F.; Webber, J. C.; Whitney, A. R.; Clark, T. A.; Ma, C.; Ryan, J.; Corey, B. E.; Counselman, C. C.; Herring, T. A.; Shapiro, I. I.; Knight, C. A.; Shaffer, D. B.; Vandenberg, N. R.; Lacasse, R.; Mauzy, R.; Rayhrer, B.; Schupler, B. R.; Pigg, J. C. Very-long-baseline radio interferometry - The Mark III system for geodesy, astrometry, and aperture synthesis. *Science*, 1983, vol. 219, 7, p. 51-54.
- [188] Romney, J. D. Cross Correlators. In *Synthesis Imaging in Radio Astronomy II*. Ed. Taylor, G. B., Carilli, C. L., Perley, R. A., *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, 1999, V. 180, pp. 57-78
- [189] Ros, E.; Marcaide, J. M.; Guirado, J. C.; Ratner, M. I.; Shapiro, I. I.; Krichbaum, T. P.; Witzel, A.; Preston, R. A. High precision difference astrometry applied to the triplet of S5 radio sources B1803+784/Q1928+738/B2007+777. *Astron. and Astrophys.*, 1999, v.348, p.381-393.

- [190] *Rybicki, G.B. and Lightman, A.P.* Radiative Processes in Astrophysics, 2004, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim
- [191] *Ryle M., Vonberg D.D.* Solar radiation at 175 Mc/s. *Nature*, 1946, **158**, 339-340.
- [192] *Ryle M.* A new radio interferometer and its application to the observation of weak radio stars. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 1952, **211**, 351-375.
- [193] *Saastamoinen, J.* Atmospheric Correction for Troposphere and Stratosphere in Radio Ranging of Satellites. In *The Use of Artificial Satellites for Geodesy*, Geophysics Monograph Series, Vol. 15. Ed. by Soren W. Henriksen, Armando Mancini, and Bernard H. Chovitz. Washington, DC: American Geophysical Union, 1972, p.247-251.
- [194] *Sagdeev, R. Z.; Matveenko, L. I.; Kogan, L. R.; Preston, R.; Hildebrand, C.* The determination of the trajectory of the motion of a balloon probe in the Venusian atmosphere via VLBI. *Pis'ma v Astronomicheskii Zhurnal*, 1988, vol. 14, p. 364-370.
- [195] *Sagdeyev, R. Z.; Kerzhanovitch, V. V.; Kogan, L. R.; Kostenko, V. I.; Linkin, V. M.; Matveyenko, L. I.; Nazirov, R. R.; Pogrebenko, S. V.; Struckov, I. A.; Preston, R. A.; Purcel, J.; Hildebrand, C. E.; Grishmanovskiy, V. A.; Kozlov, A. N.; Molotov, E. P.; Blamont, J. E.; Boloh, L.; Laurans, G.; Kaufmann, P.; Galt, J.; Biraud, F.; Boischot, A.; Ortega-Molina, A.; Rosolen, C.; Petit, G.; Mezger, P. G.; Schwartz, R.; Ronnang, B. O.; Spencer, R. E.; Nicolson, G.; Rogers, A. E. E.; Cohen, M. H.; Martirosyan, R. M.; Moiseyev, I. G.; Jatskiv, J. S.* Differential VLBI Measuremns of the Venus Atmosphere Dynamics by Balloons: VEGA Project. *Astron. Astrophys.* 1992, V. 254, pp. 387-392
- [196] *Sato, K.; Hara, T.; Fujishita, M.; Kuji, S.; Tsuruta, S.; Tamura, Y.; Sasao, T.; Manabe, S.* Application of phase-stabilized optical fiber in transmission of reference and IF signals in VLBI observation. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 1992, V. 41, Issue 3, pp. 385 - 389
- [197] *Sekido, M.; Imae, M.; Hanado, Y.; Hama, S.; Koyama, Y.; Kondo, T.; Nakajima, J.; Kawai, E.; Kurihara, N.; Ilyasov, Y. P.; Oreshko, V. V.; Rodin, A. E.; Poperechenko, B. A.* Pulsar VLBI experiment with the Kashima (Japan)-Kalyazin (Russia) baseline. *New Astronomy Reviews*, 1999, V. 43, Issue 8-10, p. 599-602.

- [198] *Scherneck, H.-G.*. Ocean tide loading: propagation of errors from the ocean tide into loading coefficients. *Man. Geod.*, 1993, V. 18(2), pp. 59-71.
- [199] *Schmidt, M.* 3C 273: A Star-Like Object with Large Red-Shift. *Nature*, 1963, v. 197, p.1040.
- [200] *Shapiro, I. I.; Wittels, J. J.; Counselman, C. C., III; Robertson, D. S.; Whitney, A. R.; Hinteregger, H. F.; Knight, C. A.; Rogers, A. E. E.; Clark, T. A.; Hutton, L. K.; Niell, A. E.* Submilliarcsecond astrometry via VLBI. I - Relative position of the radio sources 3C 345 and NRAO 512. *Astronomical Journal*, 1979, vol. 84, Oct. 1979, p. 1459-1469.
- [201] *Shibata, K. M., Kameno, S., Inoue, M., Kobayashi, H.* Mitaka Correlator for the Space VLBI. In *Radio Emission from Galactic and Extragalactic Compact Sources*, ASP Conference Series, 1998, V. 144, IAU Colloquium 164, eds. J.A. Zensus, G.B. Taylor, J.M. Wrobel p. 413.
- [202] *Schlüter W., Behrend D.* The International VLBI Service for Geodesy and Astrometry (IVS): current capabilities and future prospects. *J. Geod.*, 2007, v.81, p.379–387
- [203] *Schuh, H.* Die Radiointerferometrie auf langen Basen zur Bestimmung von Punktverschiebungen und Erdrotationsparametern. Ph.D. thesis, DGK, Reihe, C, Muenchen, 1987.
- [204] *Soffel, M. H., Müller, J., Wu, X., and Xu, C.* Consistent relativistic VLBI theory with picosecond accuracy. *Astron. J.*, 1991, 101(6), pp. 2306-2310, doi: 10.1086/115851.
- [205] *Sokolovsky, K. V.; Kovalev, Y. Y.; Pushkarev, A. B.; Lobanov, A. P.* A VLBA survey of the core shift effect in AGN jets. I. Evidence of dominating synchrotron opacity. *Astron. Astrophys.*, 2011, Volume 532, id.A38
- [206] *Sokolovsky, K. V.; Kovalev, Y. Y.; Pushkarev, A. B.; Mimica, P.; Perucho, M.* VLBI-selected sample of Compact Symmetric Object candidates and frequency-dependent position of hotspots. arXiv:1107.0719
- [207] *Sovers, O.J., Jacobs, C.S.* Observation model and parameter partials for the JPL VLBI parameter estimation software "MODEST1996. JPL Publ. 83-39, Rev.6. 1996. 151 p.

- [208] *Spergel, D. N.; Bean, R.; Dore, O.; Nolta, M. R.; Bennett, C. L.; Dunkley, J.; Hinshaw, G.; Jarosik, N.; Komatsu, E.; Page, L.; Peiris, H. V.; Verde, L.; Halpern, M.; Hill, R. S.; Kogut, A.; Limon, M.; Meyer, S. S.; Odegard, N.; Tucker, G. S.; Weiland, J. L.; Wollack, E.; Wright, E. L.* Three-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Implications for Cosmology. *Astrophys. J. Suppl.* v. 170, pp. 377-408 (2007).
- [209] (<http://steelbreeze.sourceforge.net/>)
- [210] *Takahashi, F., Kondo, T., Takahashi, Y., Koyama, Y.* Very long baseline interferometer. Ohmsha, Ltd., Tokyo, 2000.
- [211] *Tingay, S.J., Alef, W., Graham, D., Deller, A. T.* Geodetic VLBI correlation in software. *J. Geod.*, 2009, v.83, pp.1061–1069
- [212] *Titov, O., N. Zarraoa:* OCCAM 3.4 User's Guide. Communications of the Institute for Applied Astronomy (IAA), St. Petersburg, No. 69, 1997.
- [213] *Uchiyama, Y.; Urry M.C.; Cheung, C.C.; Jester, S.; Van Duynes, J.; Coppi, P.; Sambruna, R. M.; Takahashi, T.; Tavecchio, F.; Maraschi, L.* Shedding New Light on the 3C 273 Jet with the Spitzer Space Telescope. *The Astrophys. J.*, 2006, V. 648, Issue 2, pp. 910-921
- [214] *Ulvestad, J. S.* Effects of source structure on astrometry and geodesy. In *The impact of VLBI on astrophysics and geophysics*. Proc. of the 129th IAU Symposium. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1988, p. 429-430.
- [215] *Vlahakis, N.; Königl, A.* Magnetic Driving of Relativistic Outflows in Active Galactic Nuclei. I. Interpretation of Parsec-Scale Accelerations. *The Astrophysical Journal*, Volume 605, Issue 2, pp. 656-661.
- [216] <http://www.vlba.nrao.edu/>
- [217] *van Vleck, J.H, Middleton, D.* The spectrum of clipped noise. *Proc IEEE*, 1966, v.54, pp. 2–19
- [218] <http://www.vsop.isas.ac.jp/>
- [219] *Wade, C. M.* Precise Positions of Radio Sources. I. Radio Measurements. *Astrophysical Journal*, 1970, v. 162, p.381-390

- [220] *Walker, R. C.* What the VLBA Can Do For. In: Very Long Baseline Interferometry and the VLBA/NRAO Workshop No. 22, Astronomical Society of the Pacific Conference Series, Volume 82, Proceedings of a Summer School held in Socorro, New Mexico, 23-30 June 1993, San Francisco: Astronomical Society of the Pacific (ASP), 1995, edited by J.A. Zensus, P.J. Diamond, and P.J. Napier, p.133-158
- [221] *Weinberg S.* Gravitation and Cosmology. John Wiley and Sons Inc., New York, London, Sydney, Toronto, 1972.
- [222] *Weinreb, S.; Barrett, A. H.; Meeks, M. L.; Henry, J. C.* Radio Observations of OH in the Interstellar Medium. *Nature*, 1963, V. 200, 4909, pp.829-831.
- [223] *Whitney, A. R., Shapiro, I. I., Rogers, A. E. E., Robertson, D. S., Knight, C. A., Clark, T. A., Marandino, G. E.; Vandenberg, N. R.; Goldstein, R. M.* High-Accuracy Determination of 3C 273-3C 279 Position Difference from Long-Baseline Interferometer Fringe Phase Measurements. *Bulletin of the American Astronomical Society*, 1971, Vol. 3, p.465
- [224] *Whitney, A. R., Shapiro, I. I., Rogers, A. E. E., Robertson, D. S., Knight, C. A., Clark, T. A., Goldstein, R. M., Marandino, G. E., Vandenberg, N. R.* Quasars Revisited: Rapid Time Variations Observed Via Very-Long-Baseline Interferometry Science, New Series, 1971, Vol. 173, No. 3993, pp. 225-230
- [225] *Whitney, A. R.* How Do VLBI Correlators Work? IVS 2000 General Meeting Proceedings. Ed. by N. R. Vandenberg and K. D. Baver, NASA/CP-2000-209893, 2000, p.187-205
- [226] *Whitney, A. R.; Cappallo, R.; Aldrich, W.; Anderson, B.; Bos, A.; Casse, J.; Goodman, J.; Parsley, S.; Pogrebenko, S.; Schilizzi, R.; Smythe, D.* Mark 4 VLBI correlator: Architecture and algorithms. *Radio Science*, Volume 39, Issue 1, pp. 1007–1020
- [227] *Whitney, A. R.* The VLBI Standard Interface Hardware (VSI-H) Interface Specification.  
([www.vlbi.org/vsi/docs/VSI\\_H\\_paper\\_for\\_IVS\\_TOW.pdf](http://www.vlbi.org/vsi/docs/VSI_H_paper_for_IVS_TOW.pdf))
- [228] *Wilson T.L., Rohlfs K., Hüttemeister S.* Tools of radio astronomy. Fifth Ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.

- [229] *Wrobel, J. M.; Walker, R. C.* Sensitivity. In *Synthesis Imaging in Radio Astronomy II*. Edited by G. B. Taylor, C. L. Carilli, and R. A. Perley. ASP Conference Series, 1999, Vol. 180, pp. 171-186.
- [230] *Yen, J. L.; Leone, P.; Watson, G. A.; Wiedfeldt, R.; Zao, J.; Cannon, W. H.; Mathieu, P.; Tan, H.; Popelar, J.; Galt, J. A.* The Canadian Geophysical Long Baseline Interferometer. Proc. of the 129th IAU Symposium. The Impact of VLBI on Astrophysics and Geophysics. Ed. by M. J. Reid and J. M. Moran. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1988, pp.489-490
- [231] *Zarraoa, N., A. Rius, E. Sardon, H. Schuh, J. Vierbuchen* OCCAM: A Compact and Trans-portable Tool for the Analysis of VLBI Experiments. Proc. of the 7th Working Meeting on European VLBI for Geodesy and Astrometry, ed. by A. Rius, C.S.I.C. Madrid, 1990, pp. 92-102
- [232] *Zharov V.E.* New models for reduction of the VLBI data. In Proc. of Journees2003 *Astrometry, geodynamics and Solar system dynamics: from milliarcseconds to microarcseconds*, S.Peterburg, 2003, pp.231-235.
- [233] *Zharov, V. E.* Instability of the celestial reference frame and effect on UT1. Highlights of Astronomy, 2010, V. 15, p. 209

# Предметный указатель

- Антенна, 51
- Атмосфера
  - нейтральная, 187
  - прозрачность, 7
- Вращение лепестков, 101
- Время звездное, 154, 158
- Геоид, 149
- Гетеродин, 88, 94
- Диаграмма направленности, 53
  - лепестки, 54
- Дисперсия Аллана, 95
- Задержка
  - в зените, 189
  - в ионосфере, 187
  - в тропосфере, 187
  - влажная, 188
  - геометрическая, 170
  - гидростатическая, 188
  - гравитационная, 165
  - групповая, 114
  - компенсирующая, 108
  - фазовая, 111
- Земное эфемеридное начало, 162
- Ионосфера, 183
  - плазменная частота, 184
  - показатель преломления, 185
- Каталог квазаров, 50, 144
- Когерентность
  - время, 64
  - длина, 64
  - пространственная, 71
- Коррелятор, 68
  - DiFX, 131
  - FX, 130
  - XF, 128
- Лява числа, 149
- Матрица преобразования от ЗСК к НСК, 158
- Метод наименьших квадратов, 225
  - жесткие условия, 233
  - мягкие условия, 229
- Нагрузки
  - атмосферные, 179
  - океанические, 179
- Найквиста формула, 59
- Найквиста частота, 120
- Небесное эфемеридное начало, 162
- Невращающееся начало отсчета (NRO), 161–164
- Нутация
  - матрица, 160
  - теория IAU2000, 160
- Оптическая толща, 28
- Параметры вращения Земли, 15, 215
- Планка закон, 26
- Плоскость U-V, 77
- Плотность потока, 53
  - коррелированная, 85, 118
- Полюс небесный

- промежуточный, 161  
 эфемеридный, 161  
 Потенциал гравитационный, 148  
 Преобразование из ЗСК в НСК  
   классическое, 158  
   с использованием НПП, 162  
 Приемник радиоастрономический,  
   91  
 Приливы  
   океанические, 178  
   полярный, 178  
   твердотельные, 174  
 Радиоисточник  
   ЗС 273, 47  
   протяженный, 58  
   точечный, 58  
   ядро джета, 47  
 Радиотелескоп, 51  
 Разрешающая способность  
   антенны, 58  
   интерферометра, 66  
 Рэлея—Джинса закон, 27  
 Секунда атомная, 94, 153  
 Сеть РСДБ  
   EVN, 12  
   JVN, 13  
   VLBA, 12  
   Квазар-КВО, 12  
 Синтеза полосы метод, 118  
 Система координат  
   ITRF, 146, 151  
   VEN, 173  
 Система отсчета  
   BCRS, 143, 151, 161  
   GCRS, 151, 159, 161  
   ITRS, 145  
 Скорость волны фазовая, 184  
 Стандарт частоты, 89  
   нестабильность, 95  
   точность, 95  
 Стандарты МСВЗ, 140  
 Стефана—Больцмана закон, 28  
 Температура  
   антенная, 59  
   шумовая, 59, 87  
   яркостная, 30, 59  
 Тропосфера, 187  
   картирующие функции, 188  
 Угол поворота Земли, 162, 163  
 Условное международное начало,  
   145  
 Фазовый центр  
   антенны, 54  
   источника, 61, 73  
 Функция видности, 75, 78, 189  
   амплитуда, 190  
   фаза, 190  
 Функция пространственной коге-  
   рентности, 73  
 Частота  
   опорная, 94  
   преобразование, 92  
   промежуточная, 93  
 Частота интерференции, 101, 113  
 Шкала времени  
   TAI, 153  
   TCB, 151, 165  
   TCG, 145, 151, 165  
   UT, 154  
   UTC, 154  
 Эфемериды, 215  
 Эффективная площадь, 55  
 ван Флека формула, 121  
 ван Цитгерта—Цернике теорема, 71

**Жаров Владимир Евгеньевич**  
**Основы радиоастрономии**

Подписано в печать 05.12.2011.

Объем 17,5 п.л. Тираж 100 экз. Заказ № 209

Физический факультет МГУ  
имени М.В. Ломоносова

119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, стр. 2

Отпечатано в отделе оперативной печати  
физического факультета МГУ

ISBN 978-5-8279-0098-6



9 785827 900986