

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА,
ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В.ЛОМОНОСОВА

ТРУДЫ
ГОСУДАРСТВЕННОГО
АСТРОНОМИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА
им. П.К.ШТЕРНБЕРГА

Том LXVIII

2000 г.

УДК 521.3; 521.9; 52(15).

Труды Государственного астрономического института
им.П.К.Штернберга. Т.68. М.. 2000. - 156 с.

Настоящий выпуск Трудов ГАИШ содержит ряд работ по астрометрии, небесной механике и технике эксперимента. Книга адресована профессиональным астрономам, студентам старших курсов и аспирантам астрономических отделений и кафедр университетов и педвузов.

Редактор тома:
профессор И.А.Герасимов

Рецензенты:
профессор А.А. Шестаков
профессор Е.А. Гребеников

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета Государственного Астрономического института им. П.К.Штернберга

Издание осуществлено при поддержке ФЦП “Интеграция”
(проект К-0641) и Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проекты 00-02-16282, 00-02-17558).

ISSN 0371-6791

© Физический факультет МГУ, 2000 г.

Оглавление

От редактора	2
В.В.Чазов	
Основные алгоритмы численно-аналитической теории движения искусственных спутников Земли	5
Б.С.Воздвиженский, Н.П.Горбатко, В.А.Елисеев, Г.В.Романова	
Результаты наблюдений избранных малых планет в Государ- ственном астрономическом институте им. П.К.Штернберга. .	21
Д.А.Тагаева	
Результаты обработки фотографических наблюдений 10 избранных малых планет	28
И.А.Герасимов, Е.Л.Винников	
Определение областей возможных движений в задаче двух неподвижных центров.....	31
В.Н.Семенцов	
Отождествление звезд на пластинках в пределах зон Астрографического каталога.....	86
Yu.A.Shokin	
Accurate positions of variable stars in the western part of the Large Magellanic Cloud bar.....	103
А.Э.Наджиц, С.Н.Корешев	
Система внутреннего контроля для космического астрометрического эксперимента.....	125
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">Григорий Петрович Пильник</div>	145
<div style="border: 1px solid black; padding: 2px;">Вилен Валентинович Нестеров</div>	147
Список основных трудов В.В.Нестерова.....	150

От редактора

Настоящий 68-й том Трудов ГАИШ невелик по объему и содержит всего семь работ. Первая из них – блестящая статья В.В.Чазова, посвящена описанию теории движения ИСЗ, которая используется во многих организациях России вот уже более десяти лет, но описания которой в печати до сих пор не было. Статья Б.С.Воздвиженского с соавторами содержит результаты обработки наблюдений избранных малых планет, полученные в ГАИШ. Замечательно то, что все результаты приведены в единую систему координат. Работа Д.А.Тагаевой является продолжением предыдущей темы и содержит результаты обработки наблюдений десяти избранных астероидов. В работе И.А. Герасимова и Е.Л. Винникова изложена классификация областей возможных движений в задаче двух неподвижных центров, что заполняет существующий пробел в исследовании этой задачи. В статье В.Н.Семенцова изложены методы отождествления звезд в плотных полях на примере пластинок Астрографического каталога. Работа Ю.А.Шокина посвящена результатам определения координат переменных звезд в западной части Большого Магелланова облака. В статье А.Э.Наджиба и С.Н.Корешева рассмотрена проблема внутреннего контроля стабильности угла и фокусного расстояния в космическом астрометрическом эксперименте.

К сожалению, в этом году ушли из жизни замечательные астрономы Московского университета В.В.Нестеров и Г.П.Пильник, некрологи которых помещены в конце тома.

И.А.Герасимов

Основные алгоритмы численно-аналитической теории движения искусственных спутников Земли

В.В.Чазов

Аннотация

Полный интеграл обобщённой задачи двух неподвижных центров, малый параметр – сжатие Земли, метод канонических преобразований и предлагаемый подход к разработке алгоритмов позволяют в аналитическом виде и с максимально возможной точностью учесть весь комплекс факторов, действующих на искусственный спутник Земли.

The main algorithms of the semi-analytical theory of the satellite motion, by V.V.Chazov

Abstract. Full integral of the generalized two fixed centres problem, small dynamical oblateness of the Earth, canonical transformations method and the suggested approach for programming enable the whole set of the forces acting on artificial satellite to be taken into account in analytical manner with the maximum obtainable accuracy.

На движение искусственного спутника Земли оказывает влияние большое число факторов: геопотенциал, притяжение Луны и Солнца, потенциал, обусловленный приливами, давление солнечного излучения, торможение в верхней атмосфере, силы инерции.

Аналитические методы интегрирования уравнений движения допускают разделение задачи на решение главной проблемы и использование теории возмущений для учёта менее значительных действующих сил [1].

Обобщённая задача двух неподвижных центров представляется наиболее интересной и содержательной в качестве модели для главной проблемы [2].

Задача имеет малый параметр, пропорциональный сжатию Земли, интегрируема в квадратурах и аппроксимирует движение спутника в гравитационном поле со второй, третьей и, частично, четвёртой зональными гармониками. Решение главной проблемы принято называть промежуточной орбитой, в формулах для вычислений полностью учтены основные возмущающие факторы.

Неравенства, обусловленные аномальной частью гравитационного поля Земли, притяжением Луны и Солнца, действием приливов и светового давления, имеют второй порядок малости относительно сжатия и могут быть определены с помощью теории возмущений.

В статье представлены формулы, связывающие между собой параметры обобщённой задачи двух неподвижных центров, дан способ подстановки решения, полученного на основе промежуточной орбиты, в возмущающую функцию и разработан алгоритм аналитического интегрирования элементарных слагаемых. Метод позволяет проводить вычисления с точностью, ограниченной только возможностями компьютера.

Пусть fM – геоцентрическая гравитационная постоянная, r_0 – экваториальный радиус Земли, J_2, J_3 – коэффициенты при второй и третьей зональных гармониках разложения геопотенциала в ряд по сферическим функциям. Параметры c, σ вычислим по формулам

$$\begin{aligned} c &= r_0 \cdot \sqrt{J_2 - \left(\frac{J_3}{2 \cdot J_2}\right)^2}, \\ \sigma &= \frac{J_3}{2 \cdot J_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{J_2 - \left(\frac{J_3}{2 \cdot J_2}\right)^2}}. \end{aligned}$$

Положение и скорость объекта в декартовых координатах обозначим $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$. В сжатых сфероидальных координатах ξ, η, w таких, что

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{(\xi^2 + c^2) \cdot (1 - \eta^2)} \cdot \cos w, \\ y &= \sqrt{(\xi^2 + c^2) \cdot (1 - \eta^2)} \cdot \sin w, \\ z &= c \cdot \sigma + \xi \cdot \eta, \end{aligned}$$

решение уравнения Гамильтона-Якоби, соответствующего гамильтониану обобщённой задачи двух неподвижных центров, имеет вид

$$S = \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{\sqrt{\Phi(\xi)}}{\xi^2 + c^2} d\xi + \int_{\eta_1}^{\eta} \frac{\sqrt{F(\eta)}}{1 - \eta^2} d\eta + \alpha_3 \cdot w,$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) &= +2\alpha_1\xi^4 + 2fM\xi^3 + (2\alpha_1c^2 - \alpha_2^2)\xi^2 + 2fM\xi + c^2(\alpha_3^2 - \alpha_2^2), \\ F(\eta) &= -2\alpha_1c^2\eta^4 + 2fM\sigma\eta^3 + (2\alpha_1c^2 - \alpha_2^2)\eta^2 + 2fM\sigma\eta - \\ &\quad - (\alpha_3^2 - \alpha_2^2), \end{aligned}$$

$2\alpha_1$, α_2^2 , α_3 – произвольные постоянные интегрирования. Величины ξ_1 , η_1 – действительные корни полиномов $\Phi(\xi)$, $F(\eta)$, реальные движения происходят в области изменения переменных $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$, $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$, где η_2 , ξ_2 – два других корня полиномов.

Если в произвольный момент времени известны положение и скорость объекта, или, другими словами, начальные условия, то постоянные интегрирования вычисляются по формулам [2]

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - \frac{2fM \cdot (\xi - c\sigma\eta)}{\xi^2 + c^2\eta^2}, \\ \alpha_2^2 &= [x^2 + y^2 + (z - c\sigma)^2] \cdot (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\ &\quad - [x\dot{x} + y\dot{y} + (z - c\sigma)^2]^2 - c^2\dot{z}^2 \\ &\quad + \frac{2fM \cdot c\xi\eta \cdot (c\eta + \sigma\xi)}{\xi^2 + c^2\eta^2}, \\ \alpha_3 &= x\dot{y} - y\dot{x}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\xi_2 = a \cdot (1 + e),$$

$$\xi_1 = a \cdot (1 - e),$$

$$\begin{aligned}
\eta_2 &= \delta, \\
\eta_1 &= -\delta + \Delta\delta, \\
\varepsilon &= \frac{c}{a(1-e^2)}, \\
Q &= \frac{1 - 2\varepsilon\sigma\delta - \varepsilon^2\delta^2(1-e^2)}{1 + 2\varepsilon^2\delta^2(1+e^2) + \varepsilon^4\delta^4(1-e^2)^2}.
\end{aligned}$$

Для постоянных интегрирования справедливы формулы

$$\begin{aligned}
2\alpha_1 &= \frac{fM}{a} \cdot [1 - \varepsilon^2(1-e^2)(1-\delta^2) \cdot Q], \\
\alpha_2^2 &= fMa(1-e^2) \cdot \left[1 + 2\varepsilon^2(1+e^2)(1-\delta^2) \cdot Q + \right. \\
&\quad \left. \varepsilon^4(1-e^2)^2(1-\delta^2) \cdot Q \right], \\
\alpha_3^2 &= fMa(1-e^2)(1-\delta^2) \cdot \\
&\quad [1 + 2\varepsilon^2(1+e^2) + \varepsilon^4(1-e^2)^2] \cdot Q.
\end{aligned} \tag{1}$$

Величины a , e , δ , $\Delta\delta$ найдём методом последовательных приближений с учётом соотношения

$$\Delta\delta = \frac{2fMc\sigma(1-\eta_2^2)}{(2\alpha_1c^2 - \alpha_2^2) + 2fMc\sigma\eta_1 - 2\alpha_1c^2(\eta_1^2 + \eta_2^2)}.$$

Часть параметров определим по формулам

$$\begin{aligned}
p &= -\frac{fM}{2\alpha_1} \cdot \varepsilon^2(1-e^2)(1-\delta^2)Q, \\
p^2 + q^2 &= \frac{c_2(\alpha_3^2 - \alpha_2^2)}{2\alpha_1\xi_1\xi_2}, \\
n' &= \sqrt{\xi_2^2 - 2p\xi_2 + p^2 + q^2}, \\
n'' &= \sqrt{\xi_1^2 - 2p\xi_1 + p^2 + q^2}, \\
\bar{e} &= \frac{n' - n''}{n' + n''},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_2^2 &= \frac{(\xi_2 - \xi_1)^2 - (n' - n'')^2}{4n'n''}, \\
\frac{1}{k_2^2} &= -\frac{k_2^2}{1 - k_2^2}, \\
\bar{\sigma}_2 &= \sqrt{(-2\alpha_1)n'n''(1 - k_2^2)}, \\
p' &= \frac{fM}{2\alpha_1}\sigma c - \frac{\eta_1 + \eta_2}{2}c^2, \\
q'^2 - p'^2 &= -\frac{\alpha_2^2}{2\alpha_1} - c^2(1 - \eta_2^2 - \eta_1\eta_2 - \eta_1^2) + \\
&\quad + \frac{2fMc\sigma(\eta_1 + \eta_2)}{2\alpha_1}, \\
m' &= \sqrt{q'^2 - p'^2 + 2p'\eta_2 - c^2\eta_2^2}, \\
m'' &= \sqrt{q'^2 - p'^2 + 2p'\eta_1 - c^2\eta_1^2}, \\
\gamma &= \frac{m'\eta_1 + m''\eta_2}{m' + m''}, \\
s &= \frac{m''\eta_2 - m'\eta_1}{m' + m''}, \\
d &= \frac{m'' - m'}{m' + m''}, \\
k^2 &= \frac{c^2(\eta_2 - \eta_1)^2 + (m' - m'')^2}{4m'm''}, \\
k_1^2 &= \frac{k^2}{1 + k^2}, \\
\sigma_1 &= \sqrt{(-2\alpha_1)m'm''(1 + k^2)},
\end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned}
n_0 &= \frac{\sqrt{(-2\alpha_1)^3}}{fM}, \\
\hat{e} &= \frac{(-2\alpha_1) \cdot a \cdot e}{fM}, \\
\alpha &= \frac{1}{2}\sqrt{\bar{\gamma}}\text{sign}(\alpha_3)(\sqrt{A - B + C} + \sqrt{A + B + C}), \\
\beta &= \frac{1}{2}\sqrt{\bar{\gamma}}\text{sign}(\alpha_3)(\sqrt{A - B + C} - \sqrt{A + B + C}), \\
\bar{\gamma} &= \frac{4}{(\sqrt{A - B + C} + \sqrt{A + B + C})^2 - 4C},
\end{aligned}$$

где $A = 1 - \gamma^2$, $B = 2 \cdot (s\gamma - d)$, $C = d^2 - s^2$.

С точностью до первого порядка малости относительно сжатия величины a и e , \bar{e} , \hat{e} близки соответствующим значениям большой полуоси и эксцентриситета кеплеровой орбиты. Параметры δ , s ана-

логичны синусу, а параметр α аналогичен косинусу угла наклона, вычисляемого по формулам задачи двух тел.

Соотношения для сжатых сфероидальных координат запишем в виде

$$\begin{aligned}\xi &= a \cdot (1 - e \cos E), \\ \eta &= \frac{-s \cdot \cos \tilde{\varphi} + \gamma}{1 - d \cdot \cos \tilde{\varphi}}, \\ \frac{1}{\xi} &= \frac{1 + \tilde{e} \cos \psi}{a \cdot [1 - e\tilde{e} + (\tilde{e} - e) \cdot \cos \psi]}, \\ \sin \psi &= \frac{\sqrt{1 - \tilde{e}^2} \sin E}{1 - e \cdot \cos E}, \\ \cos \psi &= \frac{\cos E - \tilde{e}}{1 - \tilde{e} \cdot \cos E}.\end{aligned}\tag{2}$$

Канонические элементы l , g , h и угловые переменные $\tilde{\varphi}$, ψ , E , $\tilde{\Omega}$, w связаны выражениями

$$\begin{aligned}l &= E - \hat{e} \cdot \sin E - \lambda(\psi - l) + \sum_{j=1}^{2J} (\gamma_j^p \sin j\psi + \gamma_j^f \sin j\varphi), \\ \tilde{\varphi} &= \psi + g + \nu(\psi - l) + \sum_{j=1}^J (\kappa_{2j} \sin 2j\psi + \bar{\kappa}_{2j} \sin 2j\tilde{\varphi}), \\ \tilde{\Omega} &= h + \mu(\psi - l) + \sum_{j=1}^{2J} (\alpha_j^p \sin j\psi + \beta_j^f \sin j\tilde{\varphi}), \\ w &= \tilde{w} + \tilde{\Omega},\end{aligned}\tag{3}$$

$$\begin{aligned}\tilde{w} &= \arctan \left(\frac{\sin \tilde{\varphi}}{\alpha \cos \tilde{\varphi} - \beta} \right), \\ \sqrt{1 - \eta^2} \cos \tilde{w} &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\alpha \cos \tilde{\varphi} - \beta}{1 - d \cos \tilde{\varphi}}, \\ \sqrt{1 - \eta^2} \sin \tilde{w} &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \cdot \frac{\sin \tilde{\varphi}}{1 - d \cos \tilde{\varphi}},\end{aligned}\tag{4}$$

целое число J соответствует порядку малости относительно сжатия. Параметры ν , κ_{2j} , $\bar{\kappa}_{2j}$ определены формулами

$$\nu = \frac{\sigma_1 \cdot K(\bar{k}_2)}{\bar{\sigma}_2 \cdot K(k_1)} - 1,$$

$$\kappa_{2j} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}_2 \cdot K(k_1)} \cdot \sum_{k=j}^J \frac{1}{j} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{1}{2^{2k}} C_{2k}^{k+j} (\bar{k}_2^2)^k,$$

$$\bar{\kappa}_{2j} = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{K(k_1)} \cdot \sum_{k=j}^J \frac{1}{j} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{1}{2^{2k}} C_{2k}^{k+j} (k_1^2)^k,$$

$K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода с модулем k , C_{2k}^{k+j} – биномиальные коэффициенты.

Тригонометрические ряды для угловых переменных и два набора параметров

$$\gamma_0, \gamma'_0, \lambda = -\gamma_0 - (1 + \nu)\gamma'_0, \gamma_j p, \gamma_j^f,$$

$$\alpha'_0, \beta_0, \mu = \alpha'_0 + (1 + \nu)\beta_0, \alpha_j^p, \beta_j^f$$

получены алгоритмически на основе эллиптических интегралов

$$n_0 \int \xi^2 d\tau + n_0 c^2 \int \eta^2 d\tau,$$

$$\alpha_3 \int \frac{d\tau}{1 - \eta^2} - \alpha_3 c^2 \int \frac{d\tau}{\xi^2 + c^2},$$

где дифференциал $d\tau$ имеет вид

$$d\tau = \frac{1}{\bar{\sigma}_2} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \bar{k}_2^2 \cdot \cos^2 \psi}},$$

$$d\tau = \frac{1}{\sigma_1} \cdot \frac{d\tilde{\varphi}}{\sqrt{1 - k_1^2 \cos^2 \tilde{\varphi}}},$$

или, для интегрирования ξ^2 ,

$$d\tau = \frac{d\xi}{\sqrt{\Phi(\xi)}} = \frac{dE}{\sqrt{-2\alpha_1}\sqrt{\xi^2 - 2p\xi + p^2 + q^2}}.$$

Соотношение $d\tau/(\xi^2 + c^2)$ и часть выражения $\xi^2 d\tau$ после замены дифференциала $d\tau$ на $d\psi$ представляют из себя произведения полиномов относительно $\cos \psi$. Выражения $\eta^2 d\tau$ и, после выделения целой части, $d\tau/(1 - \eta^2)$ в результате замены $d\tau$ на $d\tilde{\varphi}$ являются произведениями полиномов относительно $\cos \tilde{\varphi}$. Алгоритм состоит из процедуры умножения полиномов и процедуры интегрирования функции косинус произвольного угла, возведённого в любую целую степень.

Для канонических элементов L , G , H справедливы формулы

$$L = \frac{fM}{\sqrt{-2\alpha_1}}(1 + \lambda) - \nu G - \mu H + I_\xi - (1 + \nu)I_\eta,$$

$$G = \frac{\alpha_2^2}{\sigma_1} \cdot \frac{2}{\pi} K(\kappa_1) - \frac{fM}{\sqrt{-2\alpha_1}} \gamma'_0 - \beta_0 H - I_\eta,$$

$$H = \alpha_3,$$

определённые интегралы

$$I_\xi = \frac{2fM}{\sqrt{-2\alpha_1}} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{j=1}^J \frac{(2j-1)!!}{(2j)!!} \int_0^\pi \frac{1}{\xi^{j-1}} \cdot \left(2p - \frac{p^2 + q^2}{\xi}\right)^j \cdot \frac{dE}{\xi},$$

$$I_\eta = \frac{2fM c \sigma}{\sigma_1} \cdot \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (-s \cdot \cos \tilde{\varphi} + \gamma) \cdot \left[1 + \sum_{j=1}^J d^j \cdot (\cos \tilde{\varphi})^j\right] \cdot \frac{d\tilde{\varphi}}{\sqrt{1 - \kappa_1^2 \cos^2 \tilde{\varphi}}}$$

имеют первый порядок малости относительно сжатия.

Частные производные от постоянных интегрирования $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ по каноническим элементам L, G, H запишем в виде

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha_1}{\partial L} &= \frac{n_0}{1 - \lambda}, \\
\frac{\partial \alpha_1}{\partial G} &= \frac{n_0 \nu}{1 - \lambda}, \\
\frac{\partial \alpha_1}{\partial H} &= \frac{n_0 \mu}{1 - \lambda}, \\
\frac{\partial \alpha_2}{\partial L} &= -\frac{1}{\Delta} \cdot \frac{\gamma'_0}{n_0}, \\
\frac{\partial \alpha_2}{\partial G} &= +\frac{1}{\Delta} \cdot \frac{1 + \gamma_0 + \gamma'_0}{n_0}, \\
\frac{\partial \alpha_2}{\partial H} &= +\frac{1}{\Delta} \cdot \frac{(1 + \gamma_0)\beta_0 - \gamma'_0 \alpha'_0}{n_0}, \\
\frac{\partial \alpha_3}{\partial L} &= 0, \\
\frac{\partial \alpha_3}{\partial G} &= 0, \\
\frac{\partial \alpha_3}{\partial H} &= 1, \\
\Delta &= \frac{\alpha_2}{\sigma_1} \cdot \frac{1 - \lambda}{n_0} \cdot \frac{2}{\pi} K(\kappa_1).
\end{aligned} \tag{5}$$

В теории возмущений необходимо вычислять частные производные от возмущающей функции по элементам промежуточной орбиты. Следующий алгоритм является одновременно и обобщением только что рассмотренной процедуры, и подготовкой к применению метода канонических преобразований для учёта всех действующих факторов.

Вместе со значениями параметров промежуточной орбиты, основанной на решении обобщённой задачи двух неподвижных центров, вычислим частные производные от этих величин по трём элементам a , e , δ . Поскольку количество независимых производных второго порядка равно шести, а третьего — десяти, то для каждого параметра как его численное значение, так и численные значения всех частных производных до третьего порядка включительно упаковываются в одномерный массив из двадцати элементов.

Кроме производных от любого параметра по трём элементам a , e , δ и производных от постоянных интегрирования α_1 , α_2 , α_3 по каноническим элементам L , G , H , необходимо промежуточное звено — алгоритм вычисления частных производных от a , e , δ по α_1 , α_2 , α_3 . Продифференцируем каждую из трёх формул (1) по a , e^2 , δ^2 . Вычисляя и обращая матрицу из трёх строк и трёх столбцов, получим численные значения частных производных от величин a , e , δ по α_1 , α_2 , α_3 . Численные значения производных по каноническим элементам получаем в результате суммирования

$$\begin{aligned}\frac{\partial a}{\partial L_j} &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial a}{\partial \alpha_k} \cdot \frac{\partial \alpha_k}{\partial L_j}, \\ \frac{\partial e^2}{\partial L_j} &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial e^2}{\partial \alpha_k} \cdot \frac{\partial \alpha_k}{\partial L_j}, \\ \frac{\partial \delta^2}{\partial L_j} &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \delta^2}{\partial \alpha_k} \cdot \frac{\partial \alpha_k}{\partial L_j}, \\ L_1 &= L, \quad L_2 = G, \quad L_3 = H.\end{aligned}$$

Производные не содержат особенностей типа деления на величины e , δ , но такие особенности появляются в формулах

$$\frac{\partial e}{\partial L_j} = \frac{1}{2e} \cdot \frac{\partial e^2}{\partial L_j},$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial L_j} = \frac{1}{2\delta} \cdot \frac{\partial \delta^2}{\partial L_j}.$$

Частные производные от угловых переменных $\tilde{\varphi}$, ψ , E , $\tilde{\Omega}$ по элементам a , e , i , l , g , h получим при дифференцировании формул (3).

Слагаемое, типичное для возмущающей функции, запишем в виде

$$J \cdot r^n \cdot \left(\frac{z}{r}\right)^k \left(\frac{x^2 + y^2}{r^2}\right)^{\frac{m}{2}} \cdot A, \quad (6)$$

где

J – численный коэффициент второго порядка малости относительно сжатия,

A – одно из произведений $\cos mw \cdot \cos q$, $\sin mw \cdot \cos q$, $\cos mw \cdot \sin q$, $\sin mw \cdot \sin q$,

$k \geq 0$, $m \geq 0$,

$n < -2$ для возмущений, обусловленных геопотенциалом и приливами,

$n \geq +2$ для возмущений, обусловленных притяжением Луны и Солнца,

аргумент $q = q_0 + \dot{q}_0 \cdot (t - t_0)$ является линейной комбинацией звёздного времени и пяти фундаментальных аргументов: средней долготы Луны, средней аномалии Луны, средней аномалии Солнца, средней широты Луны, разности средних долгот Луны и Солнца.

Так как

$$r = \xi \cdot \sqrt{1 + 2c\sigma \frac{\eta}{\xi} - c^2 \frac{\eta^2}{\xi^2} + \frac{c^2(1 + \sigma)^2}{\xi^2}},$$

$$z = \xi \cdot \left(\eta + \frac{c\sigma}{\xi^2} \right),$$

$$x^2 + y^2 = \xi^2 \cdot \left(1 + \frac{c^2}{\xi^2} \right) (1 - \eta^2),$$

где величины c^2/η^2 и $c\sigma/\xi$ имеют первый порядок малости относительно сжатия, то с точностью до произвольного порядка малости выражение (6) представим в виде суммы слагаемых типа

$$\frac{1}{\xi^2 + c^2\eta^2} \cdot B \cdot \xi^{n_1} \eta^{k_1} \cdot (1 - \eta^2) \cdot A, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} n - J &\leq n_1 \leq n + 2, \\ 0 &\leq k_1 \leq k + J. \end{aligned}$$

Слагаемое возмущающей функции стало функцией сжатых сфероидальных координат. Численный коэффициент B не зависит от элементов орбиты спутника, для каждой модели движения переход от (6) к (7) выполняется только один раз.

Второй шаг состоит в приведении выражения (7) к сумме тригонометрических слагаемых с численными коэффициентами и угловыми переменными в качестве аргументов.

На основе формул (2) и (4) запишем

$$\begin{aligned} \eta_k &= \sum_{j=0}^{k+J} a_j \cdot \cos j\tilde{\varphi}, \\ \frac{1}{\xi^n} &= \sum_{j=0}^{n+J} b_j \cdot \cos j\psi, \\ \xi_n &= \sum_{j=0}^n \tilde{b}_j \cdot \cos jE, \end{aligned} \quad (8)$$

$$(1 - \eta^2)^{\frac{m}{2}} \cos m\tilde{\omega} = \sum_{j=0}^{m+J} u_j \cdot \cos j\tilde{\varphi}, \quad (9)$$

$$(1 - \eta^2)^{\frac{m}{2}} \sin m\tilde{\omega} = \sum_{j=1}^{m+J} v_j \cdot \sin j\tilde{\varphi},$$

где $a_j, b_j, \tilde{b}_j, u_j, v_j$ – численные коэффициенты, определяемые вместе с частными производными по элементам a, e, δ . Подставим формулы (8) и (9) в (7) и приведём слагаемое возмущающей функции к сумме элементарных слагаемых типа

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\xi^2 + c^2 \eta^2} \cdot X \cdot \cos(j_1 \tilde{\varphi} + j_2 \psi + j_3 E + j_4 \tilde{\Omega} + q), \\ & \frac{1}{\xi^2 + c^2 \eta^2} \cdot Y \cdot \sin(j_1 \tilde{\varphi} + j_2 \psi + j_3 E + j_4 \tilde{\Omega} + q), \end{aligned} \quad (10)$$

где X и Y – численные коэффициенты второго порядка малости.

В последовательности преобразований (6)÷(10) промежуточное решение учитывается с точностью до произвольного порядка малости J относительно сжатия. Алгоритм, осуществляющий превращения, вместе со значениями коэффициентов X, Y вычисляет частные производные от этих величин по элементам a, e, δ .

Для интегрирования элементарного слагаемого воспользуемся дифференциальными соотношениями промежуточного движения

$$dt = (\xi^2 + c^2 \eta^2) \cdot d\tau, \quad (11)$$

и

$$\begin{aligned}
d\tilde{\varphi} &= f_0 \cdot d\tau + \sum_{k=1}^J f_{2k} \cdot \cos 2k\tilde{\varphi} \cdot d\tau, \\
d\psi &= p_0 \cdot d\tau + \sum_{k=1}^J p_{2k} \cdot \cos 2k\psi \cdot d\tau, \\
dE &= (\sqrt{-2\alpha_1} \cdot + \tilde{p}_0) \cdot d\tau - \sqrt{-2\alpha_1} \cdot a \cdot e \cos E \cdot d\tau + \\
&\quad \sum_{k=1}^{2J} \tilde{p}_k \cos k\psi \cdot d\tau, \\
d\tilde{\Omega} &= (\bar{f}_0 + \bar{p}_0) \cdot d\tau + \sum_{k=1}^{2J} \bar{f}_k \cdot \cos k\tilde{\varphi} \cdot d\tau + \\
&\quad \sum_{k=1}^{2J} \bar{p}_k \cdot \cos k\psi \cdot d\tau, \\
dt &= (a^2 + \frac{1}{2}a^2e^2 + \tilde{a}_0) \cdot d\tau - 2a^2e \cdot \cos E \cdot d\tau + \frac{1}{2}a^2e^2 \cos 2E \cdot d\tau + \\
&\quad \sum_{k=1}^{2J} \tilde{a}_k \cdot \cos k\tilde{\varphi} \cdot d\tau,
\end{aligned} \tag{12}$$

где f_{2k} , p_{2k} , \tilde{p}_k , \bar{f}_k , \bar{p}_k , \tilde{a}_k – численные коэффициенты, определяемые вместе с частными производными. Умножая пять равенств (12) соответственно на \dot{j}_1 , \dot{j}_2 , \dot{j}_3 , \dot{j}_4 , \dot{q} и складывая, имеем

$$\begin{aligned}
\bar{A} \cdot d\tau &= d(j_1\tilde{\varphi} + j_2\psi + j_3E + j_4\tilde{\Omega} + q) + \\
&\quad 2 \sum_{k=1}^{2J} \bar{H}_k \cos k\tilde{\varphi} \cdot d\tau + 2 \sum_{k=1}^{2J} H_k \cos k\psi \cdot d\tau + 2 \sum_{k=1}^2 \tilde{H}_k \cos kE \cdot d\tau.
\end{aligned} \tag{13}$$

При помощи (11) интеграл по независимой переменной t от первого из элементарных слагаемых переходит в интеграл по переменной τ

$$I_x = X \cdot \int \cos(j_1\tilde{\varphi} + j_2\psi + j_3E + j_4\tilde{\Omega} + q) \cdot d\tau. \tag{14}$$

Учитывая (13), получим рекуррентную формулу

$$\begin{aligned}
I_x = & \frac{X}{\bar{A}} \cdot \sin(j_1 \tilde{\varphi} + j_2 \psi + j_3 E + j_4 \tilde{\Omega} + q) \\
& + \frac{X}{\bar{A}} \cdot \sum_{k=1}^{2J} \bar{H}_k \cdot \int \cos[(j_1 \pm k) \tilde{\varphi} + j_2 \psi + j_3 E + j_4 \tilde{\Omega} + q] \cdot d\tau \\
& + \frac{X}{\bar{A}} \cdot \sum_{k=1}^{2J} H_k \cdot \int \cos[(j_1 \tilde{\varphi} + (j_2 \pm k) \psi + j_3 E + j_4 \tilde{\Omega} + q] d\tau \\
& + \frac{X}{\bar{A}} \cdot \sum_{k=1}^2 \tilde{H}_k \cdot \int \cos[j_1 \tilde{\varphi} + j_2 \psi + (j_3 \pm k) E + j_4 \tilde{\Omega} + q] d\tau.
\end{aligned} \tag{15}$$

Интегрирование возможно не всегда. Возмущающая функция содержит слагаемые как короткого, от долей оборота до нескольких суток, так и долгого, порядка одного года, периодов, и, что важно для всей теории, слагаемые с очень большими периодами и вековой член. Информация о периоде конкретного слагаемого содержится в коэффициенте \bar{A} . Если величина

$$\frac{\bar{A}}{a^2} = \frac{j_1 f_0 + j_2 p_0 + j_3 (\sqrt{-2\alpha_1} \cdot a + \tilde{p}_0) + j_4 (\bar{f}_0 + \bar{p}_0 + \dot{q}(a^2 + \frac{1}{2} \cdot a^2 e^2 + \tilde{a}_0))}{a^2}$$

меньше заранее выбранной частоты, то соответствующий член возмущающей функции является долгопериодическим, и аналитическое интегрирование не выполняется.

Численные значения величин H_k , \bar{H}_k , \tilde{H}_k , определяются вместе с численными значениями частных производных по параметрам a , e , δ . В рекуррентной формуле (15), как и во всех предыдущих алгоритмах, промежуточное решение принимается во внимание с точностью до произвольного порядка малости J относительно сжатия.

Общий метод расчёта положения космических объектов включает в себя численное интегрирование осреднённых канонических уравнений движения с возмущающим гамильтонианом, состоящим из долгопериодических членов, вычисление неравенств короткого периода,

полученных в аналитическом решении, метод наименьших квадратов для улучшения начальных значений определяемых параметров на основе наблюдений.

Предлагаемые алгоритмы проверены при обработке высокоточных измерений топоцентрических дальностей до искусственного спутника Земли Лагос за 1992, 1993 и 1994 годы. Процедура вычислений полностью учитывала рекомендации Международной службы вращения Земли [3]. Среднеквадратическая погрешность одного измерения находится в пределах от 2 до 10 см. На пятисуточных интервалах определены координаты полюса с точностью $0.''0002$ и вариации продолжительности суток с точностью $0.^s00001$. Получен ряд значений коэффициента эмпирического ускорения. Точность определения координат станций лазерной локации составила 5 мм. Вычисленное поле скоростей, то есть вековые изменения в положении обсерваторий за три года, находится в хорошем согласии с результатами, опубликованными различными центрами обработки наблюдений.

Литература

1. Brower D. Solution of the problem of artificial satellite theory without drag. //Astron.J., 1959, v.**64**, N 9, p.378-397.
2. Аксёнов Е.П. Теория движения искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1977.
3. IERS conventions(1996). IERS Technical note 21. Observatoire de Paris. 1996.

Результаты наблюдений избранных малых планет в Государственном астрономическом институте им. П.К.Штернберга.

Б.С.Воздвиженский, Н.П.Горбатко,
В.А.Елисеев, Г.В.Романова

Аннотация

Представлено 91 положение для 4-х избранных малых планет в системе опорного каталога Тихо. Наблюдения выполнены на обсерватории Майданак и в Звенигороде.

The results of the observations of the selected minor planets in Sternberg State Astronomical institute,

by B.S.Vozdvijenski, N.P.Gorbatko, V.A.Yeliseev, G.V.Romanova.

Abstract. 91 positions of 4 selected minor planets in the Tycho Reference Catalogue system are presented. The observations have been made on the Maidanak observatory and in Zvenigorod.

В 1991 году Комиссия 20 МАС на Генеральной ассамблее Международного астрономического союза, которая проходила в Буэнос-Айресе (Аргентина), одобрила программу позиционных наблюдений 15-ти избранных малых планет на 1992-2000 годы.

Эта программа является логическим продолжением более ранних программ Д.Брауэра, Б.Нумерова и В.И.Орельской. Целью новой программы является получение высокоточных позиционных наблюдений 15-ти избранных астероидов, пригодных для определения параметров ориентации и систематических ошибок опорных каталогов, определение этих величин и получение высокоточных орбит избранных малых планет.

В соответствии с вышеназванной международной программой наблюдений избранных астероидов в Государственном Астрономическом институте им. П.К.Штернберга в 1991 году продолжались наблюдения малых планет на горе Майданак на широкоугольном астрографе АФР-1 ($D = 230$ мм, $F = 2300$ мм) и в Звенигороде на широкоугольном астрографе ША Института астрономии РАН ($D = 400$ мм, $F = 2000$ мм).

В настоящей статье представлены результаты наблюдений 4-х избранных астероидов – 3.Юноны, 6.Гебы, 18.Мельпомены и 39.Летидии за 1991 год на двух астрографах. В таблицах 1 и 2 приведены положения названных малых планет по наблюдениям на Майданаке (46 положений) и по наблюдениям в Звенигороде (45 положений) соответственно. Таблицы 1 и 2 содержат по столбцам следующие данные: номер положения по порядку, дата, момент наблюдения UTC (всемирное координированное время), α , δ – топоцентрические сферические координаты на эпоху 2000.0, (О-С) по α и δ .

Наблюдения избранных астероидов на горе Майданак в Средней Азии проводились Н.П.Горбатко в период с июня по октябрь 1991 года. Всего было получено 47 астронегативов и 186 отдельных изображений малых планет, по которым было выведено 46 точных положений.

В наблюдениях в Звенигороде участвовали Б.С. Воздвиженский и Г.В. Романова. Эти наблюдения проводились в период с апреля по октябрь 1991 года. Всего было получено 70 астронегативов и 149 отдельных изображений малых планет, по которым было выведено 45 точных положений.

В качестве опорного каталога был принят Tycho Reference Catalog [1]. При отождествлении астронегативов использовалась программа визуализации опорного каталога [2]. Измерение астронегативов и обработка наблюдений проведены В.А.Елисеевым.

В качестве редуccionной модели был использован полный квадратичный полином. Количество опорных звезд на астронегативах

выбиралось в пределах от 9 до 15. Число экспозиций на одном астро-негативе составляло от 1 до 5. За окончательные результаты на дату наблюдения принимались средние арифметические значения моментов, сферических координат и разностей (О–С) из всех экспозиций. В разностях (О–С), как обычно, “О” – положения малых планет, полученные из наблюдений, “С” – вычисленные эфемеридные положения, полученные интерполированием на момент наблюдения из “Ежедневных эфемерид избранных малых планет на 1991–1992 гг.” (Части I, II и III).

Предварительный анализ рядов наблюдений избранных астероидов, полученных на двух вышеназванных астрографах, был выполнен в работе [3]. Авторами было показано, что эти ряды наблюдений, скорее всего, являются однородными.

В заключение отметим, что наблюдения избранных малых планет 3.Юноны и 39.Летиции в системе опорного каталога RPM были ранее опубликованы (Астрономический вестник, 1996, т.30, N 5, с.478-479.), но с появлением новейшего опорного каталога Тихо были переобработаны и включены в настоящую статью. В указанной публикации были обнаружены и исправлены две ошибки: для 3.Юноны вместо прежнего момента 1991 8 11.71282 даются новые момент 1991 8 12.71282 и положение и для 39.Летиции также даются новые момент 1991 8 1.73833 и положение вместо прежнего момента 1991 8 1.73594.

Таблица 1. Результаты наблюдений малых планет на Майданаке.

N	дата		UTC	R.A.(J2000)			decl.(J2000)			(O-C)	
			d	h	m	s	°	'	"	s	"
3. Юнона											
1	1991	7	6.82778	19	41	02.865	-04	23	20.53	.004	.05
2	1991	7	10.80394	19	37	39.938	-04	33	50.28	.037	.09
3	1991	7	16.79847	19	32	23.753	-04	54	18.44	-.005	-.11
4	1991	8	6.76201	19	14	57.755	-06	41	53.61	.010	.04
5	1991	8	8.73535	19	13	34.998	-06	54	8.62	.007	-.06
6	1991	8	10.72429	19	12	15.797	-07	06	43.50	.008	-.09
7	1991	8	12.71282	19	11	01.178	-07	19	30.24	.021	-.13
8	1991	8	15.72285	19	09	17.427	-07	39	8.97	.012	-.11
9	1991	9	7.76505	19	03	10.797	-10	10	55.08	-.002	-.09
10	1991	10	30.66178	19	37	04.618	-14	00	48.17	.033	-.08
6. Геба											
11	1991	8	6.79514	22	44	37.571	-11	57	16.26	.033	-.17
12	1991	8	8.77380	22	43	55.527	-12	25	21.68	.019	-.01
13	1991	8	10.75561	22	43	07.549	-12	54	19.07	.062	.29
14	1991	8	12.74921	22	42	13.535	-13	24	11.37	.029	.02
15	1991	8	15.76354	22	40	41.919	-14	10	30.45	.007	-.16
16	1991	9	7.80334	22	25	26.523	-20	05	42.90	.013	.04
17	1991	9	9.79118	22	24	07.744	-20	32	38.93	.034	.01
18	1991	9	16.87370	22	19	56.598	-21	58	56.24	.038	-.03
19	1991	10	31.66903	22	26	55.010	-24	20	11.44	.078	.17
18. Мельпомена											
20	1991	6	2.77407	17	14	52.314	-06	33	44.17	-.045	.01
21	1991	6	3.77164	17	13	52.326	-06	32	04.22	-.015	.01
22	1991	6	6.88704	17	10	41.322	-06	27	51.71	.006	.16
23	1991	6	7.82431	17	09	43.255	-06	26	54.21	-.001	.04
24	1991	7	6.75002	16	42	33.909	-07	11	04.68	-.002	.05
25	1991	7	10.72274	16	40	00.533	-07	27	43.35	-.015	-.14
26	1991	7	12.76107	16	38	51.712	-07	37	06.17	-.002	-.03
27	1991	7	15.72228	16	37	24.567	-07	51	40.82	.004	.06
28	1991	7	16.70628	16	36	59.022	-07	56	45.84	.003	-.21
29	1991	9	8.66846	16	56	47.970	-14	02	11.43	-.007	.19
30	1991	9	9.68358	16	57	53.724	-14	09	14.97	.004	.22
31	1991	10	3.62465	17	29	39.121	-16	40	18.47	.005	.22

Таблица 1. продолжение

N	дата		UTC d	R.A.(J2000) h m s			decl.(J2000) ° ' "			O-C s "	
39. Летиция											
32	1991	6	10.92500	19	07	51.550	-08	42	25.67	.035	-.12
33	1991	6	15.87535	19	04	41.997	-08	43	24.36	.023	-.23
34	1991	7	6.79530	18	47	51.474	-09	24	38.82	-.002	-.02
35	1991	7	10.76597	18	44	26.642	-09	38	53.45	.065	.25
36	1991	7	16.76194	18	39	27.372	-10	03	41.93	.083	.33
37	1991	7	30.69497	18	29	40.774	-11	13	04.15	.038	.14
38	1991	8	1.73594	18	28	32.909	-11	24	12.60	.035	.10
39	1991	8	6.71868	18	26	11.176	-11	52	03.85	.032	-.10
40	1991	8	8.70183	18	25	24.739	-12	03	20.45	.027	-.11
41	1991	8	10.69277	18	24	44.098	-12	14	43.90	.015	-.02
42	1991	8	12.68602	18	24	09.618	-12	26	10.91	.040	.07
43	1991	9	7.72133	18	26	23.307	-14	50	27.99	.019	-.08
44	1991	10	3.66968	18	45	13.241	-16	41	21.79	.034	-.06
45	1991	10	30.62694	19	17	58.246	-17	38	41.60	.023	.11
46	1991	11	1.60822	19	20	46.624	-17	40	11.89	.055	-.12

Таблица 2. Результаты наблюдений малых планет в Звенигороде.

N	дата		UTC	R.A.(J2000)			decl.(J2000)			O—C	
			d	h	m	s	°	'	''	s	''
3. Юнона											
1	1991	5	23.96481	20	01	17.752	-05	03	32.06	.019	-.25
2	1991	6	7.93854	19	58	46.674	-04	21	18.07	.015	-.13
3	1991	6	15.94201	19	55	24.782	-04	09	29.36	-.017	-.13
4	1991	6	22.93902	19	51	24.190	-04	06	35.07	.017	-.04
5	1991	6	28.94595	19	47	15.816	-04	10	03.62	.012	-.07
6	1991	7	29.88361	19	21	03.160	-05	55	59.48	-.019	-.12
7	1991	8	2.89196	19	17	50.953	-06	18	41.63	.019	-.11
8	1991	8	3.89329	19	17	04.845	-06	24	35.31	.009	-.13
9	1991	8	16.82106	19	08	42.493	-07	46	23.97	.017	-.04
10	1991	8	23.82448	19	05	38.844	-08	33	02.06	-.014	-.12
11	1991	8	24.83943	19	05	18.095	-08	39	48.70	.023	.02
12	1991	10	4.74525	19	12	59.553	-12	38	11.07	-.021	.04
13	1991	10	9.70966	19	16	37.152	-12	59	01.00	-.010	.15

Таблица 2. продолжение

N	дата		UTC d	R.A.(J2000) h m s			decl.(J2000) ° ' "			O-C s "	
6. Геба											
14	1991	7	29.92964	22	46	22.331	-10	15	13.94	.036	.07
15	1991	7	29.94026	22	46	22.230	-10	15	21.33	.025	.28
16	1991	8	2.93395	22	45	41.616	-11	05	08.71	.011	.04
17	1991	8	3.99242	22	45	26.302	-11	19	03.97	.008	.02
18	1991	8	16.89262	22	40	04.668	-14	28	09.70	.027	.08
19	1991	8	23.87431	22	35	47.314	-16	19	02.00	.018	-.06
18. Мельпомена											
20	1991	4	12.00648	17	36	50.050	-10	00	10.84	.008	.03
21	1991	5	12.93108	17	31	59.022	-07	37	33.51	-.006	.08
22	1991	5	23.88333	17	24	03.638	-06	57	50.28	-.019	.06
23	1991	5	23.89844	17	24	02.892	-06	57	47.74	.020	-.17
24	1991	6	15.90304	17	01	17.866	-06	24	48.10	.026	-.28
25	1991	6	22.89514	16	54	15.992	-06	32	08.95	.016	-.16
26	1991	6	28.89433	16	48	44.360	-06	45	10.35	-.007	.04
27	1991	7	29.80722	16	34	05.918	-09	13	41.30	.024	.10
28	1991	8	3.81303	16	34	22.387	-09	46	41.15	-.002	-.18
29	1991	8	14.78733	16	37	34.894	-11	03	21.54	.007	-.07
30	1991	8	16.78154	16	38	32.169	-11	17	41.82	-.009	-.10
39. Летиция											
31	1991	4	11.97908	19	01	52.233	-11	30	52.95	-.004	-.20
32	1991	5	12.94875	19	15	21.459	-09	34	19.87	-.003	-.26
33	1991	5	23.94491	19	14	52.865	-09	04	41.96	.061	-.06
34	1991	6	15.92269	19	04	40.089	-08	43	26.19	.015	.28
35	1991	6	22.91400	18	59	30.667	-08	50	38.13	.021	-.25
36	1991	6	28.91679	18	54	36.904	-09	02	11.75	.017	.01
37	1991	7	29.85979	18	30	9.909	-11	08	35.14	.011	-.29
38	1991	8	2.86572	18	27	57.688	-11	30	28.17	.027	-.30
39	1991	8	3.84330	18	27	28.697	-11	35	54.25	.033	-.08
40	1991	8	14.80949	18	23	39.686	-12	38	25.34	-.001	-.28
41	1991	8	16.80206	18	23	18.273	-12	49	53.59	.000	-.50
42	1991	8	23.80938	18	22	53.999	-13	29	52.77	.016	.31
43	1991	8	24.80808	18	22	56.977	-13	35	30.97	-.019	-.19
44	1991	10	4.70521	18	46	15.713	-16	44	46.37	.018	.01
45	1991	10	9.68100	18	51	31.872	-16	59	51.19	.029	-.11

Литература

1. Høg E., Kuzmin A., Bastian U., Fabricius C., Kuimov K., Lindgren L., Makarov V., Roser S. Tycho Reference Catalogue. // Astron. Astrophys., 1998, **335**, P. L65.
2. А.А.Волчков, А.В.Кузьмин. Использование программы визуализации каталогов для обработки пластинок Астрографического каталога. /О Четырехмиллионном каталоге звезд: Сб. науч. тр. Под ред. А.П. Гуляева и В.В. Нестерова.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1992, с. 38-42.
3. Воздвиженский Б.С., Горбатко Н.П., Елисеев В.А., Романова Г.В. Анализ результатов наблюдений избранных малых планет на двух широкоугольных астрографах. //Астрономический вестник, 1997, том **31**, N 6, с. 501-503.

Результаты обработки фотографических наблюдений 10 избранных малых планет

Д.А.Тагаева

По программе наблюдений избранных малых планет на протяжении многих лет выполнялись работы по фотографическим наблюдениям 10 малых планет (1, 2, 3, 4, 6, 7, 11, 18, 39, 40). Это программа имеет целью уточнение положений точки весеннего равноденствия и экватора и выявление периодических ошибок звездных каталогов.

В результате получено 504 положения малых планет, полученных из наблюдений на широкоугольном астрографе ГАИШ ($D = 230$ мм, $F = 2300$ мм.) за период 1972–1982 гг. Общее количество астронегативов составило 736 [1].

Малые планеты являются хорошими объектами приложения нового метода вычисления возмущающей функции, предложенного в [2]. Орбиты малых планет близки к орбите Юпитера, основного возмущающего тела Солнечной системы. Угол наклонения астероида Паллада превосходит 34 градуса, эксцентриситет орбиты Юноны более 0.25. Для построения аналитических теорий движения таких объектов разрабатывались специальные методы вычисления возмущений в координатах, однако большое количество членов возмущающей функции создавало значительные трудности на этом пути.

Высокоточная численная эфемерида DE200 использовалась нами как эталон для определения постоянных параметров численно-аналитической теории движения больших планет Солнечной системы. При обработке топоцентрических положений малых планет эфемерида DE200/LE200 задавала также координаты центра масс Земли.

Численно-аналитическая теория движения, построенная в [2] для каждой из десяти избранных малых планет, является совокупностью численных значений шести средних элементов орбиты на заданный момент времени, алгоритма численного интегрирования осредненных уравнений движения с эволюционным гамильтонианом и алгоритма учета короткопериодических возмущений в любой точке средней орбиты. Как эволюционный гамильтониан, так и функция преобразования между оскулирующими и средними элементами орбиты состоят из элементарных тригонометрических слагаемых. Критерием качества разработанной теории движения каждого из астероидов будем считать среднеквадратическую погрешность одного измерения.

Результаты вычислений собраны в таблице, где приняты следующие обозначения:

n – номер малой планеты,
 a – большая полуось в астрономических единицах,
 e – эксцентриситет,
 i – угол наклона в градусах,
 S – количество членов в функции преобразования,
 F – количество членов в эволюционном гамильтониане,
 σ – среднеквадратическая погрешность одного измерения в секундах дуги.

Как следует из таблицы, после обработки наблюдений среднеквадратическая погрешность одного измерения находится в пределах от трех десятых до четырех десятых секунды дуги. Эта величина хорошо согласуется с оценками как внутренней так и внешней точности каталога положений малых планет.

Таблица 1.

n	Name	a	e	i	S	F	σ
1	Ceres	2.76	0.077	10.60	6100	160	0.33
2	Pallas	2.77	0.234	34.80	11200	680	0.41
3	Juno	2.67	0.258	12.98	7400	540	0.40
4	Vesta	2.36	0.090	7.13	4200	130	0.30
6	Hebe	2.42	0.203	14.76	5900	340	0.34
7	Iris	2.38	0.231	5.51	5900	510	0.37
11	Parthenope	2.45	0.101	4.63	4200	150	0.31
18	Melpomene	2.29	0.218	10.13	6000	380	0.32
39	Laetitia	2.77	0.114	10.37	5600	200	0.30
40	Harmonia	2.27	0.047	4.26	3200	70	0.29

Литература

1. В.А.Елисеев, Каталог положений малых планет
//Труды ГАИШ, 1988, т. LIX, стр. 133-139.
2. И.А. Герасимов, В.В.Чазов, Л.В. Рыхлова, Д.А.Тагаева, По-
строение теории движения тел Солнечной системы основанной
на универсальном методе вычисления возмущенной функции
//Астрон.журн., 2000, N 5.

Определение областей возможных движений в задаче двух неподвижных центров

И.А. Герасимов, Е.Л. Винников¹

Предисловие

Задача о движении точки в поле тяготения двух неподвижных центров была впервые введена в астрономию Л.Эйлером в 1760 году, которому и принадлежит первое решение задачи для случая движений, происходящих в одной плоскости [1]. Лагранжу удалось найти решение для пространственного случая [2]. Классификацию типов движений в случае движений в плоскости провел К.Шарлье [3], и позднее ее уточнил Г.Бадалян [4]. Существенный вклад в исследование пространственного варианта задачи сделал В.Алексеев [5]. И.Герасимову удалось найти общее решение задачи в функциях Вейерштрасса [6]. На основании этой работы нам удалось определить области возможных движений данной задачи, что и составляет предмет данной статьи.

1 Аналитическое решение задачи

1.1 Постановка задачи

Классическая задача двух неподвижных центров, введенная в астрономию великим Эйлером, состоит в изучении движения материаль-

¹Новосибирский педагогический университет

ной точки P под действием ньютоновского притяжения двух других неподвижных материальных точек P_1 и P_2 (центров). Пусть массы точек P_1 и P_2 равны соответственно 1 и m , причем $0 < m \leq 1$. Начало прямоугольной системы координат $OXYZ$ поместим в середине отрезка $[P_1P_2]$, длину которого положим равной двум. (В большом числе работ авторы полагают расстояния между центрами равным $2c$. Это утяжеляет вычисления и не меняет сути дела, хотя несложно видеть, что подходящим выбором единиц длины мы всегда можем добиться выполнения равенства $c = 1$). Ось OX направим вдоль P_1P_2 так, что координаты P_1 и P_2 будут соответственно $(-1, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$ (рис.1). Далее единицу времени выберем так, чтобы постоянная Гаусса равнялась единице, и обозначим через t время. При этих условиях уравнения движения точки P таковы:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (1)$$

здесь положено

$$U = \frac{1}{r_1} + \frac{m}{r_2},$$

$$r_1^2 = (x + 1)^2 + y^2 + z^2, \quad r_2^2 = (x - 1)^2 + y^2 + z^2.$$

Поставим себе задачу найти зависимость от времени координат точки P и определить все возможные типы ее движения.

1.2 Уравнения движения

Введем переменные λ , μ , w по формулам:

$$\begin{aligned} x &= \lambda\mu, \\ y &= \sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)} \cos w, \\ z &= \sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)} \sin w, \end{aligned} \quad (2)$$

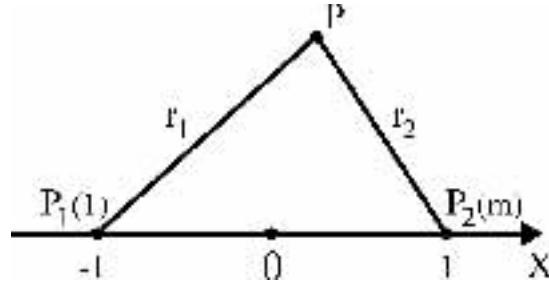


Рис. 1.

в которых будем полагать

$$\lambda \geq 1, \quad -1 \leq \mu \leq 1. \quad (3)$$

Отсюда, с учетом (1), получаем:

$$\lambda = \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad \mu = \frac{r_1 - r_2}{2}. \quad (4)$$

Из этих соотношений следует, что уравнениям $\lambda = const$, $\mu = const$ отвечают соответственно эллипсоиды и двуполостные гиперболоиды вращения вокруг оси OX с фокусами в точках P_1 и P_2 , а $w = const$ есть уравнение плоскости, проходящей через эту ось.

Легко убедиться, что система координат λ, μ, w триортогональна, и поэтому:

$$V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = C_1 \dot{\lambda}^2 + C_2 \dot{\mu}^2 + C_3 \dot{w}^2, \quad (5)$$

здесь точкой обозначено дифференцирование по времени, а через

$$C_1 = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - 1}, \quad C_2 = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}, \quad C_3 = (\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2) -$$

соответствующие коэффициенты Ламе.

Образуя обобщенные импульсы, сопряженные координатам λ , μ , w :

$$\lambda_* = C_1 \lambda^2, \quad \mu_* = C_2 \mu^2, \quad w_* = C_3 w^2, \quad (6)$$

и учитывая, что, согласно (3), $r_1 = \lambda + \mu$, $r_2 = \lambda - \mu$, приходим к канонической системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_*}; & \frac{d\mu}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \mu_*}; & \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial w_*}; \\ \frac{d\lambda_*}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \lambda}; & \frac{d\mu_*}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \mu}; & \frac{dw_*}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial w}, \end{aligned} \quad (7)$$

в которой гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} (C_1^{-1} \lambda_*^2 + C_2^{-1} \mu_*^2 + C_3^{-1} w_*^2) - \frac{m}{\lambda - \mu} - \frac{1}{\lambda + \mu}.$$

В силу консервативности системы существует интеграл энергии $H = a/2$, здесь a – произвольная постоянная. Вводя по формулам

$$\lambda_* = \frac{\partial S}{\partial \lambda}; \quad \mu_* = \frac{\partial S}{\partial \mu}; \quad w_* = \frac{\partial S}{\partial w} \quad (8)$$

функцию действия $S(\lambda, \mu, w)$, мы можем записать уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\begin{aligned} (\lambda^2 - \mu^2)^{-1} & \left[(\lambda^2 - 1) \left(\frac{\partial S}{\partial \lambda} \right)^2 + (1 - \mu^2) \left(\frac{\partial S}{\partial \mu} \right)^2 + \right. \\ & \left. \left(\frac{1}{\lambda^2 - 1} + \frac{1}{1 - \mu^2} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial w} \right)^2 - 2m_1 \lambda + 2m_2 \mu \right] = \alpha, \end{aligned} \quad (9)$$

в котором положено $m_1 = 1 + m$, $m_2 = 1 - m$.

Из независимости гамильтониана H от переменной w следует, что $\frac{\partial S}{\partial w} = \beta$, где β – еще одна произвольная постоянная. Следовательно, S представима в виде:

$$S(\lambda, \mu, w) = S_3(\lambda, \mu) + \beta w.$$

Далее выражение (9) домножением его на величину $(\lambda^2 - \mu^2)$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными:

$$\begin{aligned} &(\lambda^2 - 1) \left(\frac{\partial S_3}{\partial \lambda} \right)^2 + \frac{I}{\lambda^2 - 1} - 2m_1\lambda - \alpha\lambda^2 + \\ &(1 - \mu^2) \left(\frac{\partial S_3}{\partial \mu} \right)^2 + \frac{I}{1 - \mu^2} + 2m_2\mu + \alpha\mu^2 = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

причем через I будем теперь обозначать величину β^2 . Представляя решение в виде $S_3(\lambda, \mu) = S_1(\lambda) + S_2(\mu)$ и вводя еще одну произвольную постоянную γ , получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned} &(\lambda^2 - 1) \left(\frac{\partial S_1}{\partial \lambda} \right)^2 + \frac{I}{\lambda^2 - 1} - 2m_1\lambda - \alpha\lambda^2 = \gamma \\ &(1 - \mu^2) \left(\frac{\partial S_2}{\partial \mu} \right)^2 + \frac{I}{1 - \mu^2} + 2m_2\mu + \alpha\mu^2 = -\gamma. \end{aligned} \quad (11)$$

Интегрируя эту систему, легко находим

$$S = \pm \int \frac{\sqrt{L(\lambda)}}{\lambda^2 - 1} d\lambda \pm \int \frac{\sqrt{M(\mu)}}{1 - \mu^2} d\mu + \beta w + \varphi(\alpha, \beta, \gamma), \quad (12)$$

где φ – произвольная дифференцируемая функция, и кроме того положено

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \alpha\lambda^4 + 2m_1\lambda^3 + \delta\lambda^2 - 2m_1\lambda + \varepsilon, \\ M(\mu) &= \alpha\mu^4 + 2m_2\mu^3 + \delta\mu^2 - 2m_2\mu + \varepsilon, \end{aligned} \quad (13)$$

причем $\delta = \gamma - \alpha$, $\varepsilon = -\gamma - I$. Далее будем именовать полиномы $L(\lambda)$, $M(\mu)$ основными.

1.3 Свойства основных полиномов

Займемся далее исследованием свойств основных полиномов. Во-первых, если $m \neq 1$, мы имеем:

$$L(\lambda, m_1) = M(\mu, m_2), \quad (14)$$

Во-вторых, несложно видеть, что

$$L(\mp 1) = M(\mp 1) = -\beta^2. \quad (15)$$

Далее рассмотрим случай $\beta = 0$, тогда из полученного равенства следует, что основные полиномы имеют корни $\lambda_{3,4} = \mp 1$, $\mu_{3,4} = \mp 1$, а значит представимы в виде:

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= (\lambda^2 - 1)(\alpha\lambda^2 + 2m_1\lambda - \varepsilon), \\ M(\mu) &= (\mu^2 - 1)(\alpha\mu^2 + 2m_2\mu - \varepsilon). \end{aligned} \quad (16)$$

В случае обращения в нуль постоянной энергии a они становятся полиномами третьей степени, однако если массы P_1 и P_2 равны, то, как несложно видеть, $M(\mu)$ становится квадратичным:

$$M(\mu) = \gamma(\mu^2 - 1) - I. \quad (17)$$

1.4 Первые интегралы

Подставляя выражение S из (12) в (8), приходим к первым интегралам задачи:

$$\lambda_* = \pm \sqrt{\frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - 1}}, \quad \mu_* = \pm \sqrt{\frac{M(\mu)}{1 - \mu^2}}, \quad w_* = \beta,$$

откуда, если воспользоваться соотношениями (6), можно найти:

$$\dot{\lambda} = \pm \sqrt{\frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \mu^2}},$$

$$\dot{\mu} = \pm \sqrt{\frac{M(\mu)}{\lambda^2 - \mu^2}}, \quad (18)$$

$$\dot{w} = \frac{\beta}{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}.$$

Не рассматривая пока случай $\lambda^2 = \mu^2$ что, согласно формуле (4), отвечает равенствам $r_1 = 0$ или $r_2 = 0$, то есть исключая случай столкновения точки P с центром P_1 или P_2 , перейдем к новой независимой переменной τ по формуле:

$$dt = (\lambda^2 - \mu^2)d\tau. \quad (19)$$

Несложно видеть, что поскольку $\lambda^2 - \mu^2 = r_1 r_2 > 0$, то τ монотонно возрастает со временем. С учетом этого соотношения уравнения (18) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{d\tau} &= \pm \sqrt{L(\lambda)}, \\ \frac{d\mu}{d\tau} &= \pm \sqrt{M(\mu)}, \\ \frac{dw}{d\tau} &= \beta \left(\frac{1}{\lambda^2 - 1} + \frac{1}{1 - \mu^2} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned} a_0 = b_0 = \alpha, \quad a_1 = -a_3 = 2m_1, \quad a_2 = b_2 = \frac{\delta}{6}, \\ b_1 = -b_3 = 2m_2, \quad a_4 = b_4 = \varepsilon, \end{aligned} \quad (21)$$

согласно (13), основные полиномы могут быть представлены в таком виде:

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= a_0 \lambda^4 + 4a_1 \lambda^3 + 6a_2 \lambda^2 - 4a_3 \lambda + a_4, \\ M(\mu) &= b_0 \mu^4 + 4b_1 \mu^3 + 6b_2 \mu^2 - 4b_3 \mu + b_4. \end{aligned} \quad (22)$$

1.5 Интегрирование уравнения для переменной λ

Рассмотрим сначала движения с ненулевой энергией, то есть случай $a_0 \neq 0$. Тогда решение уравнения

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^2 = L(\lambda) \quad (23)$$

можно записать, используя вторую форму Вейерштрасса [6]:

$$\lambda = l_1 + \frac{l_2}{\wp_1(\tau - \tau_1) - l_3}, \quad (24)$$

где τ_1 — произвольная постоянная; l_1 — корень $L(\lambda)$,

$$l_2 = \frac{1}{4} \frac{dL(l_1)}{dl_1}, \quad l_3 = \frac{1}{24} \frac{d^2L(l_1)}{dl_1^2}, \quad (25)$$

\wp_1 — функция Вейерштрасса, построенная по инвариантам

$$\begin{aligned} g_2(a) &= a_0 a_4 + 3a_2^2 - 4a_1 a_3, \\ g_3(a) &= a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4. \end{aligned} \quad (26)$$

Вводя постоянные c_1, c_2 при помощи формул

$$\wp_1(c_1) = l_3 + \frac{l_2}{1 - l_1}, \quad \wp_1(c_2) = l_3 - \frac{l_2}{1 + l_1} \quad (27)$$

и используя соотношение (24), можно получить следующее нужное нам в дальнейшем представление:

$$\begin{aligned} (1 - \lambda^2)^{-1} &= (1 - l_1^2)^{-1} + \frac{l_2}{2} \{ (1 - l_1^2)^2 [\wp_1(\tau - \tau_1) - \wp_1(c_1)]^{-1} - \\ &\quad (1 + l_1^2)^{-2} [\wp_1(\tau - \tau_1) - \wp_1(c_2)]^{-1} \}. \end{aligned} \quad (28)$$

Из (24) и (27) следует, что $\lambda(c_1) = 1$ и $\lambda(c_2) = -1$. Но, как мы уже установили, при $\beta \neq 0$ значения $\lambda \pm 1$ не являются корнями $L(\lambda)$, а значит согласно (24) $\wp'_1(c_1) \neq 0$, $\wp'_1(c_2) \neq 0$. Но при $\wp'_1(\nu) \neq 0$, как известно [6]:

$$\int \frac{dz}{\wp(z) - \wp(\nu)} = \frac{1}{\wp'(\nu)} \ln \frac{\sigma(z - \nu)}{\sigma(z - \nu)} + 2 \frac{\zeta(\nu)}{\wp'(\nu)} z + \text{const}, \quad (29)$$

где σ и ζ – функции Вейерштрасса.

Таким образом, получаем:

$$J_1(\lambda) = \int \frac{d\tau}{\lambda^2 - 1} = -(1 - l_1^2)^{-1} \tau - l_2[(1 - l_1)^{-2} \varphi_1(\tau, c_1) - (1 + l_1)^{-2} \varphi_1(\tau, c_2)], \quad (30)$$

где

$$\varphi_1(\tau, c_k) = \frac{1}{\wp'(c_k)} \left[\zeta_1(c_k)(\tau - \tau_1) + \frac{1}{2} \ln \frac{\sigma_1(\tau - \tau_1 - c_k)}{\sigma_1(\tau - \tau_1 + c_k)} \right], \quad (31)$$

здесь и далее σ_k – просто нумерованная σ – функция (поскольку в данной работе кофункции σ_1 , σ_2 , σ_3 не используются), $k = 1, 2$.

Рассмотрим теперь случай $\alpha = 0$, тогда

$$L(\lambda) = 4a_1\lambda^3 + 6a_2\lambda^2 + 4a_3\lambda + a_4, \quad (32)$$

и решение уравнения (23) имеет следующий вид [6]:

$$\lambda = \frac{1}{a_1} [\wp_1(\tau - \tau_1) - \frac{a_2}{2}], \quad (33)$$

где τ_1 – произвольная постоянная, а \wp_1 построена по инвариантам (26) с учетом того, что $a_0 = 0$.

Используя (33), можно вывести соотношение:

$$\frac{1}{1 - \lambda^2} = \frac{a_1}{2} \left[\frac{1}{\wp_1(\tau - \tau_1) - \wp_1(c_1)} - \frac{1}{\wp_1(\tau - \tau_1) - \wp_1(c_2)} \right], \quad (34)$$

где положено:

$$\wp_1(c_1) = \frac{a_2}{2} - a_1, \quad \wp_1(c_2) = \frac{a_2}{2} + a_1. \quad (35)$$

Совершенно аналогично тому, как это было сделано ранее, можно показать, что, если $\beta \neq 0$, то $\wp'(c_k) \neq 0$ ($k = 1, 2$). Тогда легко находим:

$$J_2(\lambda) = \int \frac{d\tau}{\lambda^2 - 1} = -a_1 [\varphi_1(\tau, c_1) - \varphi_1(\tau, c_2)], \quad (36)$$

где φ_1 определяется выражением (31).

1.6 Интегрирование уравнения для переменной μ

1.6.1 $\alpha \neq 0$

Сначала рассмотрим первый вариант $\alpha \neq 0$, тогда решение уравнения

$$\left(\frac{d\mu}{d\tau}\right)^2 = M(\mu) \quad (37)$$

имеет вид, аналогичный (24):

$$\mu = n_1 + \frac{n_2}{\wp_2(\tau - \tau_2) - n_3}. \quad (38)$$

Здесь τ_2 — произвольная постоянная; n_1 — корень $M(\mu)$, а n_2 и n_3 образованы по формуле, аналогичной (25) с заменой L на M и l_1 на n_1 , \wp_2 — функция Вейерштрасса с инвариантами $g_2(b)$, $g_3(b)$, которые определяются по формулам (26) путем замены a_j на b_j ($j = 0, 1, 2, 3, 4$).

Вводя далее постоянные d_1 и d_2 согласно выражениям (27) с заменой l_j на n_j ($j = 1, 2, 3$) и \wp_1 на \wp_2 , несложно установить, что

$$J_3(\lambda) = \int \frac{d\tau}{1 - \mu^2} = -a_1[\varphi_1(\tau, c_1) - \varphi_1(\tau, c_2)], \quad (39)$$

где φ_2 получается из φ_1 путем замены c_k на d_k , ζ_1 на ζ_2 , σ_1 на σ_2 и \wp_1 на \wp_2 .

1.6.2 $\alpha = 0$, $m \neq 1$

Пусть далее $\alpha = 0$. Второй вариант отвечает случаю $m \neq 1$ (массы P_1 и P_2 отличны), тогда совершенно аналогично (33) находим:

$$\mu = \frac{1}{b_1} \left[\wp_2(\tau - \tau_2) - \frac{b_2}{2} \right]. \quad (40)$$

Определяя далее постоянные d_1 и d_2 по формулам (35) путем замены \wp_1 на \wp_2 , легко находим:

$$J_4(\mu) = \int \frac{d\tau}{1 - \mu^2} = b_1 [\varphi_2(\tau, d_1) - \varphi_2(\tau, d_2)]. \quad (41)$$

Если $m = 1$ (массы центров одинаковы), то согласно (17)

$$M(\mu) = \gamma(\mu^2 - 1) - I. \quad (42)$$

и при $M(\mu) \geq 0$,

$$0 \leq I \leq \gamma(\mu^2 - 1). \quad (43)$$

Далее возможны следующие варианты:

1.6.3 $\gamma = 0$.

Тогда из (43) вытекает, что $\beta = 0$, то есть движение будет происходить в плоскости $w = \text{const}$, причем всегда $M(\mu) = 0$. Следовательно, $\mu = \mu_0 = \text{const}$.

Таблица 1.

N	Значения параметров		
1	$\alpha \neq 0$		
2	$\alpha = 0$	$m \neq 1$	
3		$m = I$	$\gamma = 0$
4			$\gamma = -I$
5			$\gamma < -I \leq 0$

1.6.4 $\gamma = -I < 0$.

Теперь $M(\mu) = \gamma\mu^2 \leq 0$. Движение возможно только в плоскости $\mu = 0$.

1.6.5 $\gamma < -I \leq 0$.

В этом случае $M(\mu) > 0$ при $\mu_2 > \mu > \mu_1$, где $\mu_{1,2} = \mp\sqrt{1 + I/\gamma} \leq 1$ — действительные корни. Уравнение (37) приобретает вид:

$$\left(\frac{d\mu}{d\tau}\right)^2 = -\gamma(\mu_2^2 - \mu^2), \quad (44)$$

решение которого очевидно:

$$\mu = \mu_2 \cos(\sqrt{-\gamma}(\tau - \tau^2)). \quad (45)$$

Таким образом, возможны *пять вариантов* представления переменной μ , значения параметров которых представлены в таблице 1.

1.7 Интегрирование уравнения для переменной w

Обратимся теперь к переменной w . Как следует из (18), при $\beta = 0$ движение точки P происходит в фиксированной плоскости $w = \text{const}$.

Поэтому далее будем полагать $\beta \neq 0$. Тогда в случае 1 табл.1 согласно параграфу 1.6 имеем:

$$w = w_0 + \beta[J_1(\lambda) + J_3(\mu)], \quad (46)$$

где $w_0 = \text{const}$, а $J_1(\lambda)$ и $J_3(\mu)$ определяются соотношениями (30) и (39) соответственно.

В случае 2, как несложно видеть:

$$w = w_0 + \beta[J_2(\lambda) + J_4(\mu)], \quad (47)$$

причем слагаемые, заключенные в скобки, находятся из выражений (36) и (41).

Для случая 3 имеем:

$$w = w_0 + \beta[J_2(\lambda) + \frac{\tau}{1 - \mu_0}]. \quad (48)$$

Полагая здесь $\mu_0 = 0$, мы получим решение для случая 4. И, наконец, в случае 5:

$$w = w_0 + \beta \left[J_2(\lambda) + \arctan \sqrt{-\gamma} \frac{\tan \left(\sqrt{-\gamma}(\tau - \tau_2) \right)}{\beta} \right]. \quad (49)$$

2 Определение областей возможных движений в пространственном случае

Положим теперь $\beta \neq 0$ и будем учитывать, что согласно (3) для переменных λ и μ необходимо выполнение соотношений:

$$\lambda \geq 1, \quad -1 \leq \mu \leq 1. \quad (50)$$

Далее из интегралов (20) следует, что реальные движения точки P возможны лишь в тех областях пространства, в которых для основных полиномов L, M выполнены условия:

$$L(\lambda) \geq 0, \quad M(\mu) \geq 0. \quad (51)$$

Соответствующие интервалы переменных λ, μ определяются в свою очередь взаимными расположениями действительных корней полиномов.

При непрерывном изменении коэффициентов полиномов качественная картина в расположении корней не изменяется до тех пор, пока некоторые из них не сливаются и становятся кратными. Последнее означает выполнение некоторых зависимостей констант, через которые выражаются коэффициенты основных полиномов. Таких констант три: это постоянные интегрирования α, β и ε . Выбирая одну из них, например β , в качестве фиксированного параметра, для двух других можно найти соответствующие зависимости. Иначе говоря, на плоскости (α, ε) выделяются кривые кратных корней, разбивающие ее на связные области, в каждой из которых качественный характер движения одинаков.

2.1 Случай неравных масс

В данном параграфе мы рассмотрим вариант пространственной задачи с разными массами точек P_1 и P_2 ($m < 1$).

Общий принцип построения кривых кратных корней проследим на примере полинома $L(\lambda)$. Разделив обе части уравнения $L(\lambda) = 0$ на $\lambda^2 - 1$ (что возможно в силу свойства полиномов (15)) и обозначив $I = \beta^2$, получим соотношение:

$$\alpha\lambda^2 + 2m_1\lambda - \frac{I\lambda^2}{\lambda^2 - 1} = \varepsilon, \quad (52)$$

дифференцируя которое по λ , будем иметь:

$$\alpha\lambda + m_1 - \frac{I\lambda}{(\lambda^2 - 1)^2} = 0. \quad (53)$$

Очевидно, значение λ , удовлетворяющее последним двум уравнениям, и будет кратным корнем полинома $L(\lambda)$. Решая данную систему относительно α и λ , мы находим искомые уравнения кривой кратных корней:

$$\alpha = -\frac{m_1}{\lambda} - \frac{I}{(\lambda^2 - 1)^2}, \quad \varepsilon = m_1\lambda - \frac{I\lambda^4}{(\lambda^2 - 1)^2}. \quad (54)$$

Из этих соотношений, в частности, следует, что $\alpha(-1/\lambda) = \varepsilon(\lambda)$, $\varepsilon(-1/\lambda) = \alpha(\lambda)$, то есть кривая симметрична относительно прямой $\alpha = \varepsilon$. Кроме того, кривая имеет точку самопересечения A_0 на оси симметрии, где $\varepsilon = \alpha = -m_1^2/I$, что отвечает двум значениям λ :

$$\lambda = -\frac{I}{2m_1} \pm \sqrt{1 + \frac{I^2}{4m_1^2}}. \quad (55)$$

Уравнения (54) позволяют выявить асимптотику кривой кратных корней, что позволяет установить предельные соотношения, представленные в таблице 2.

Таблица 2.

$\lambda \rightarrow$	$+0$	-0	± 1	$+\infty$	$-\infty$
$\alpha \rightarrow$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	-0	$+0$
$\varepsilon \rightarrow$	$+0$	-0	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Определим теперь точки возврата кривой (54). Дифференцирование выражений (54) по λ приводит к следующим соотношениям:

$$\frac{d\alpha}{d\lambda} = \frac{m_1}{\lambda^2} + \frac{4I\lambda}{(\lambda^2 - 1)^3}, \quad \frac{d\varepsilon}{d\lambda} = \lambda^2 - \frac{d\alpha}{d\lambda}. \quad (56)$$

В точках возврата кривой необходимо обращение в нуль правых частей уравнений. Поскольку кривая кратных корней не содержит точек $\lambda = 0$, то для отыскания точек возврата достаточно приравнять к нулю первое из соотношений (56). В результате получим:

$$-\frac{I}{2m_1} = \frac{(\lambda^2 - 1)^3}{8\lambda^3}, \quad (57)$$

а извлекая из обеих частей этого соотношения кубический корень и вводя обозначение $\beta_1 = (I/2m_1)^{1/3}$, будем иметь:

$$\lambda^2 + 2\beta_1\lambda - 1 = 0.$$

Решение этого уравнения дает два значения кратного корня, отвечающие двум точкам возврата:

$$\lambda_{1,2} = -\beta_1 \pm \nu_1, \quad (58)$$

причем $0 < \lambda_1 < 1$, $\lambda_2 < -1$, $\nu = \sqrt{\beta_1^2 + 1}$. Подстановка этих значений в (56) и определит координаты точек возврата:

$$\alpha_{2,1} = \varepsilon_{1,2} = -m_1 \left(\frac{3}{2}\beta_1 + \beta_1^3 \pm \nu_1^3 \right). \quad (59)$$

В последних двух формулах верхний знак соответствует первому индексу, а нижний – второму. Так как $\nu_1^3 > \beta_1^3 + \frac{3}{2}\beta_1$, то $\alpha_1 = \varepsilon_2 < 0$, $\varepsilon_1 = \alpha_2 > 0$.

Следовательно, точка $A_1(\alpha_1, \varepsilon_1)$ находится во втором, а $A_2(\alpha_2, \varepsilon_2)$ – в четвертом квадрантах плоскости (α, ε) .

Как известно из алгебры [7], простые точки кривой кратных корней полинома отвечают двойным корням полинома $L(\lambda)$, а точки возврата – тройным. При этом в точках возврата изменяется направление вогнутости кривой. Из (59) следует, что

$$\frac{d\varepsilon_{1,2}}{d\beta_1} < 0, \quad \frac{d\alpha_{1,2}}{d\beta_1} < 0, \quad (60)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_1}{d\alpha_1} &= \frac{1 + 2\beta_1^2 - 2\beta_1\nu_1}{1 + 2\beta_1^2 + 2\beta_1\nu_1} \\ \frac{d\varepsilon_2}{d\alpha_2} &= \left(\frac{d\varepsilon_1}{d\alpha_1} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (61)$$

Так как $\nu_1^2 > 2\beta_1\nu_1$, то $0 < \frac{d\varepsilon_1}{d\alpha_1} < 1$, $\frac{d\varepsilon_2}{d\alpha_2} > 1$.

Значит, при увеличении β_1 точки возврата движутся влево и вниз: первая – по кривой с наклоном меньше, а вторая – с наклоном больше 1. Поскольку в каждой простой точке кривой кратных корней, согласно (56), $\frac{d\varepsilon}{d\alpha} = \lambda^2$, то

$$\frac{d^2\varepsilon}{d\alpha^2} = 2\lambda \frac{d\lambda}{d\alpha}. \quad (62)$$

Поэтому направление вогнутости кривой изменяется кроме точек возврата еще и при $\lambda \pm 1$, $\lambda = \pm\infty$, $\lambda = 0$.

Таким образом, из всего выше сказанного о свойствах кривой кратных корней следует, что мы можем построить ее, что и сделано на рис.2.

Совершенно аналогично решается задача о построении кривой кратных корней уравнения $M(\mu) = 0$. При этом согласно свойству (14) надо только произвести замены:

$$\frac{d^2\varepsilon}{d\alpha^2} = 2\mu \frac{d\mu}{d\alpha}. \quad (63)$$

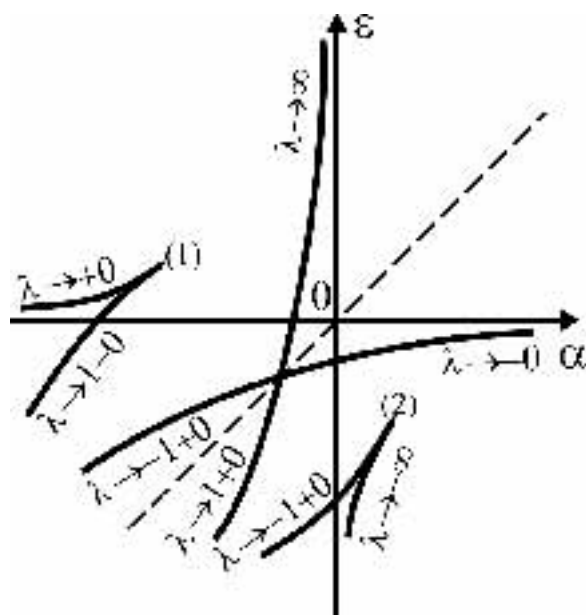


Рис. 2.

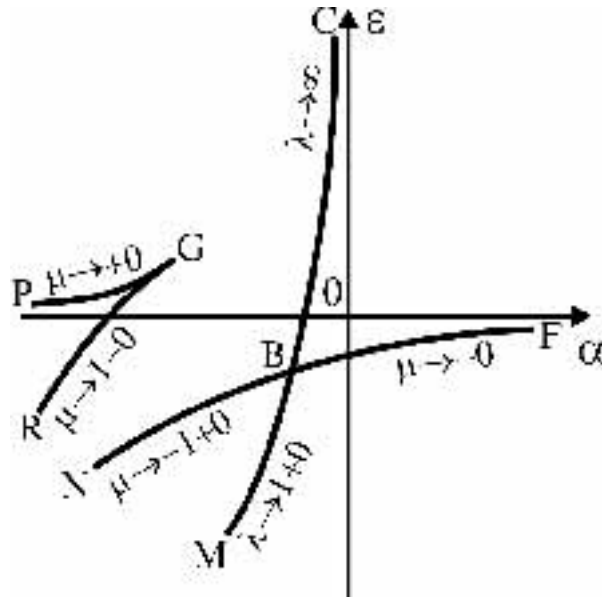


Рис. 3.

Очевидно, что эта кривая выглядит подобно кривой на рис.2.

Итак, кривые кратных корней распадаются на несколько непрерывных ветвей, а поскольку среди корней отсутствуют значения ± 1 , то они не проходят через эти точки. И при непрерывном изменении параметров α , ε корни основных полиномов также не могут перейти через эти значения. Так как $\lambda \geq 1$, $-1 \leq \mu \leq 1$, то достаточно учитывать только те ветви кривых кратных корней, которые находятся в указанных интервалах. Изображая на одном рисунке допустимые ветви кривых для обоих уравнений, получаем рис.3.

Для простых точек кривой кратных корней полинома $M(\mu)$ справедливо соотношение, аналогичное второй формуле из (54):

$$\frac{d\varepsilon}{d\mu} = \mu^2 \frac{d\alpha}{d\mu}. \quad (64)$$

Отсюда следует, что $\frac{d\varepsilon}{d\alpha} = \mu^2 < 1$. Итак, допустимая часть кри-

вой имеет наклон меньше 1 и состоит из двух ветвей: одна – NF – для интервала $(-1,0)$, другая – PGR – для $(0,1)$. При переходе через значение $\mu = 0$ кривая уходит в бесконечность, имея прямую $\varepsilon = 0$ своей асимптотой. На верхней ветви имеется точка возврата G, отвечающая наличию у уравнения $M(\mu) = 0$ трехкратного корня $\mu = \sqrt{\beta_2^2 + 1} - \beta_2$. Координаты этой точки определяются в соответствии с выражением (59), в котором надо заменить β_1 на β_2 :

$$\alpha = -m_2 \left[\frac{3}{2}\beta_2 + \beta_2^3 + (\beta_2^2 + 1)^{3/2} \right], \quad (65)$$

$$\varepsilon = m_2 \left[(\beta_2^2 + 1)^{3/2} - \frac{3}{2}\beta_2 - \beta_2^3 \right]. \quad (66)$$

Так как $(\beta_2^2 + 1)^{3/2} > \beta_2^3 + \frac{3}{2}\beta_2 > \beta_2^3 - \frac{3}{2}\beta_2$, то $\alpha < -2m_2\beta_2^2 = -I$, $\varepsilon > 0$.

Теперь в уравнениях для кривой кратных корней $M(\mu)$, аналогичных (56):

$$\alpha = -\frac{m_2}{\mu} - \frac{I}{(1 - \mu^2)^2}, \quad \varepsilon = m_2\mu - \frac{I\mu^4}{(1 - \mu^2)^2}, \quad (67)$$

зафиксируем μ и выясним поведение соответствующей точки $V = (\alpha(\mu), \varepsilon(\mu))$ при изменении I . Как видно из (67),

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right)_{\beta=\text{const}} = \mu^4, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial I} < 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial I} < 0. \quad (68)$$

Следовательно, с ростом I точка V движется влево по прямой с наклоном $\mu^4 < \mu^2$ (так как $\mu^2 < 1$). Поскольку нижняя ветвь кривой (67), то есть NF, для интервала $-1 < \mu < 0$ выпукла вверх и наклон в точке V равен μ^2 , то при увеличении I эта ветвь монотонно поднимается вверх, так что ветви с разными I не пересекаются.

Кривая кратных корней $L(\lambda)$, задаваемая параметрическими уравнениями (56), имеет, как изображено на рис. 3, одну ветвь MC в полуплоскости $\alpha < 0$, соответствующую $\lambda > 1$, и наклоном в каждой точке $W = (\alpha(\lambda), \varepsilon(\lambda))$, как ранее показано, равным $\lambda^2 > 1$. Аналогично кривой (67), кривая (56) при возрастании I монотонно движется, но уже вниз, так как каждая ее точка W смещается, как следует из (56), влево по прямой с наклоном $\lambda^4 < \lambda^2$. Это видно из соотношений, аналогичных (68), получаемых при замене μ на λ .

Точка возврата G кривой (67), как показано ранее, с ростом I смещается влево по кривой с положительным наклоном, не превышающим 1. Поэтому, если кривая MC расположена правее точки G , то при уменьшении I они монотонно сближаются.

Изучим теперь следующий вопрос – имеется ли такое критическое значение $I_0 = \beta_0^2$, при котором точка возврата G лежит на кривой MC и при $I < I_0$ оказывается правее нее, а при $I > I_0$ – левее, то есть для значений $I > I_0$ кривая MC не пересекается с PGR , а при $I < I_0$ – пересекается с ней в двух точках (с нижней же ветвью NF кривая MC пересекается только в одной точке B (рис.3), так как у MC наклон больше, а у NF – меньше 1).

Для точки возврата G , согласно (65), имеем:

$$\alpha\varepsilon = -m_2^2 \left[(\beta_2^2 + 1)^3 - \beta_2^2 \left(\beta_2^2 + \frac{3}{2} \right)^2 \right] = -m_2^2 - \frac{3}{4} \sqrt{\frac{(\beta m_2)^4}{4}}. \quad (69)$$

Далее для кривой MC , как следует из (67), имеет место такое неравенство:

$$\begin{aligned} \alpha\varepsilon = - \left[\frac{m_1}{\lambda} + \frac{I}{(\lambda^2 - 1)^2} \right] \left[m_1 \lambda - \frac{I \lambda^4}{(\lambda^2 - 1)^2} \right] = \\ -m_1^2 + \frac{I \lambda}{(\lambda^2 - 1)} \left[m_1 + \frac{I \lambda^3}{(\lambda^2 - 1)^3} \right] > -m_1^2. \end{aligned} \quad (70)$$

Таким образом, в случае равных масс точек P_1 и P_2 ($m_1 = 1$, $m_2 = 0$) такого критического значения I_0 не существует.

При $\varepsilon > 0$ для кривой MC имеем:

$$\begin{aligned} m_1 \lambda &> \frac{I \lambda^4}{(\lambda^2 - 1)^2} \\ \text{или} \quad \frac{I \lambda^2}{(\lambda^2 - 1)} &< \frac{\sqrt{m_1}}{|\beta|} \lambda, \end{aligned} \quad (71)$$

то есть

$$\begin{aligned} \varepsilon - \alpha &= m_1 \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right) - I \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2 - 1} > \\ m_1 \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right) - 2\sqrt{m_1} \lambda &> (m_1 - 2\sqrt{m_1} |\beta|) \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right) > \\ &2\sqrt{m_1} (\sqrt{m_1} - 2|\beta|), \end{aligned} \quad (72)$$

откуда следует, что при малых значениях β в области $\varepsilon > 0$ кривая MC лежит выше прямой $\varepsilon - \alpha = m_1 + m_2 = 2$, значит, и выше точки G . В то же время при больших β , согласно неравенству (70), MC лежит ниже гиперболы $\alpha \varepsilon = -m_1^2$, а G , согласно (69), — выше, а это означает, что для всех значений $m \neq 0$ критическое значение I_0 существует всегда.

С целью выявления характера расположения корней при различных α и ε целесообразно записать уравнение (52) в виде:

$$\alpha \lambda^2 + 2m_1 \lambda - \varepsilon = \frac{I \lambda^2}{\lambda^2 - 1}. \quad (73)$$

Расположение его корней, совпадающих с корнями $L(\lambda)$, можно исследовать, фиксируя α , β и варьируя ε . Это соответствует движению по вертикальным прямым $\varepsilon = \text{const}$. Выбирая различные значения

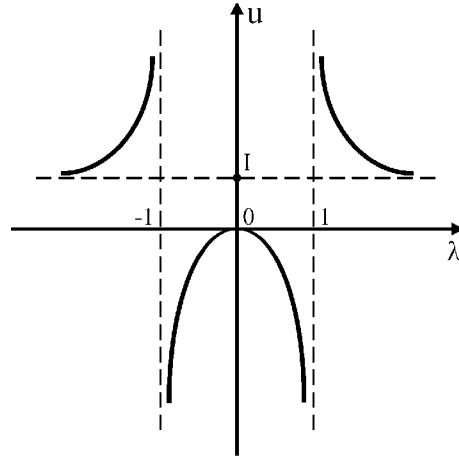


Рис. 4.

α и изменяя ε , можно попасть в любую область из тех, на которые разбивают плоскость (α, ε) ветви кривой кратных корней. Левая часть уравнения (73) при $\alpha \neq 0$ задает параболу с вертикальной осью $\lambda = -\frac{m_1}{\alpha}$, а при $\alpha = 0$ — прямую $u = 2m_1\lambda - \varepsilon$. График правой части (73) — кривая третьего порядка, изображенная на рис. 4.

$$u = \frac{I\lambda^2}{\lambda^2 - 1}. \quad (74)$$

Изменяя ε при $\alpha = \text{const}$, то есть перемещая параболу по вертикали, можно качественно выявить расположение точек ее пересечения с кривой (74), абсциссы которых и есть корни основного полинома $L(\lambda)$. Согласно свойству (14) анализ расположения корней полинома $M(\mu)$ совершенно аналогичен и осуществляется заменой в уравнении (73) $m_1 \rightarrow m_2$.

Исследование этим методом приводит к выводу, что условия (50) и (51) выполняются справа от кривой MC и сверху от кривой NF

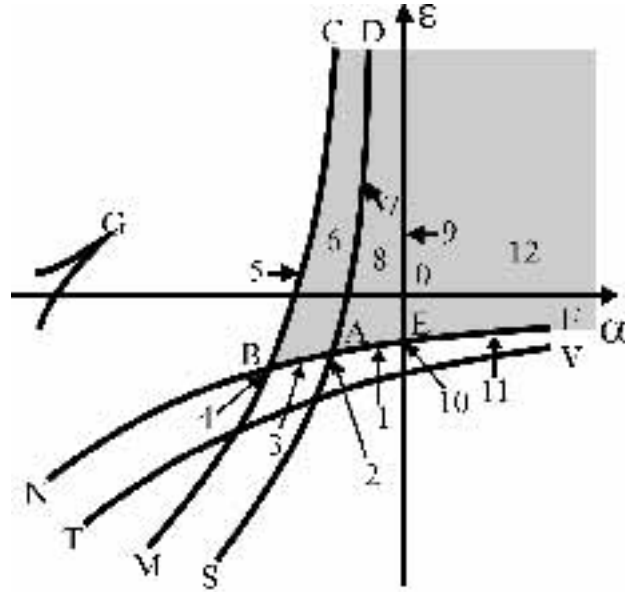


Рис. 5.

на рис. 3 (при $m_2 > 0$). Далее из соотношений (54) следует:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial m_1} = -\frac{1}{\lambda}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial m_1} = \lambda, \quad \text{так что} \quad \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \right)_{\lambda=\text{const}} = -\lambda^2.$$

Значит, с уменьшением m_1 любая точка ветви MC движется вправо по прямой с наклоном $-\lambda^2 < -1$. Так как, согласно (62), на этой ветви $\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \alpha^2} > 0$, то есть эта кривая выпукла. Следовательно, с уменьшением m_1 она монотонно движется вправо и вниз. Заметим, что ветви с разными m_1 общих точек не имеют. При уменьшении m_1 до m_2 эта ветвь преобразуется в линию SD (рис. 5), отвечающую ветви кривой кратных корней уравнения $M(\mu) = 0$, находящихся в интервале $\mu > 1$.

Используя симметрию кривой кратных корней относительно прямой $\alpha = \varepsilon$, можно построить и ветвь кривой (54) для интервала $-1 < \lambda < 0$. Она лежит ниже кривой NF (кривая TV на рис.5).

Таблица 3.

N	Множества на плоскости (α, ε)	$L(\lambda)$	$M(\mu)$
$\alpha < 0, I > I_0$			
1	Открытая дуга AE		
2	Точка A		
3	Открытая дуга AB		
4	Точка B		
5	Полубесконечная открытая ветвь BC		
6	Полубесконечная открытая полоса, выделенная линиями AB, BC, AD		
7	Полубесконечная открытая ветвь AD		
8	Полубесконечная открытая полоса, выделенная линиями $AD, AE, E\varepsilon$		

Таблица 3. (продолжение)

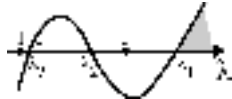
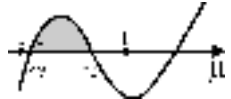


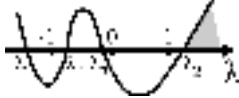
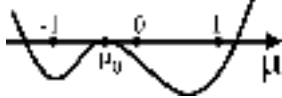
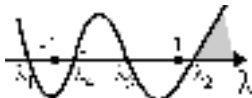
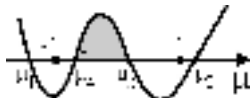

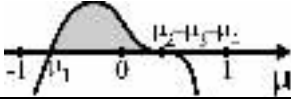
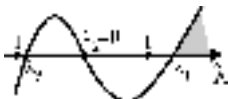
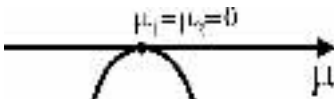
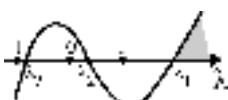
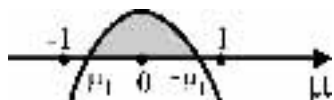
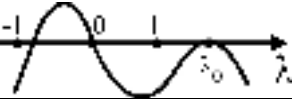
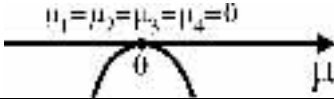
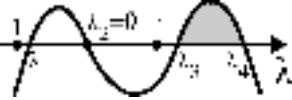
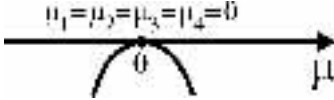

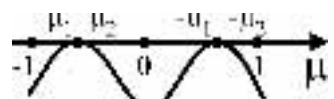
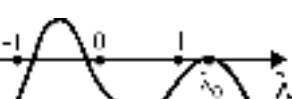
N	Множества на плоскости (α, ε)	$L(\lambda)$	$M(\mu)$
$\alpha = 0$			
9	Открытый луч $E\varepsilon$		
10	Точка E		
$\alpha > 0$			
11	Полубесконечная открытая ветвь EF		
12	Открытая область правее луча $E\varepsilon$ и выше линии EF		
$\alpha < 0, I = I_0$			
13	Точка G на рис.6		

Таблица 3. (продолжение)

N	Множества на плоскости (α, ε)	$L(\lambda)$	$M(\mu)$
$\alpha < 0, 0 < I < I_0$			
14	Точка L		
15	Открытая дуга KL		
16	Точка K		
17	Открытая дуга KG		
18	Точка G на рис.7		
19	Открытая дуга LG		
20	Открытый треугольник KLG		

Таблица 3. (продолжение)

N	Множества на плоскости (α, ε)	$L(\lambda)$	$M(\mu)$
$\alpha = 0, I > I_0$			
21	Точка 0 на рис.10		
22	Луч 0ε		
$\alpha < 0, I = I_0$			
23	Точка G на рис.11		
$\alpha < 0, I < I_0$			
24	Точка G на рис.12		
25	Открытая дуга DG		
26	Точка D		

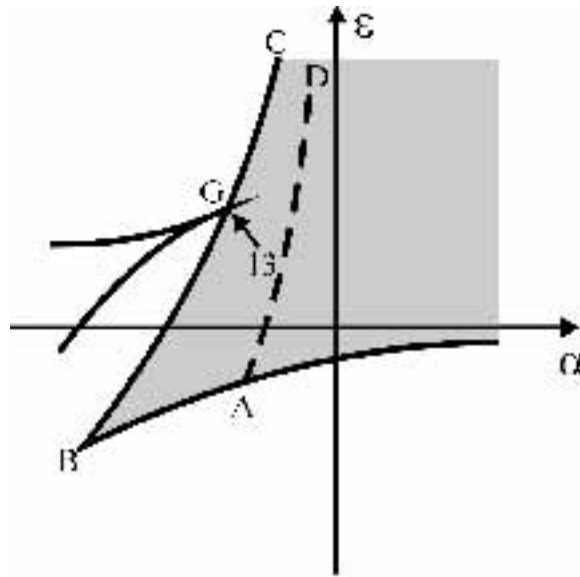


Рис. 6.

Области, где движение возможно, на рис.5 и далее заштрихованы (чертеж отвечает значениям $I > I_0$).

Применяя описанный выше метод перемещения по прямым $\alpha = \text{const}$, можно обнаружить, что отмеченным на рис.5 числами точкам, линиям и областям отвечают 12 сочетаний взаимного расположения корней $L(\lambda)$ и $M(\mu)$, представленные в табл.3. Заштрихованным участкам и жирным точкам отвечают интервалы или отдельные значения λ , μ , при которых движение возможно. Если корень имеет определенный знак, то он отмечен (если это не следует непосредственно из чертежа). К найденным случаям необходимо добавить те, которые отвечают условию $I \leq I_0$. Так, если $I = I_0$, то точка возврата G лежит на линии BC (рис.6), и этой точке отвечает случай 13 (табл.3).

В этом случае уравнение $M(\mu) = 0$ имеет трехкратный корень. Оставшиеся случаи имеют место при условии $0 < I < I_0$. Теперь

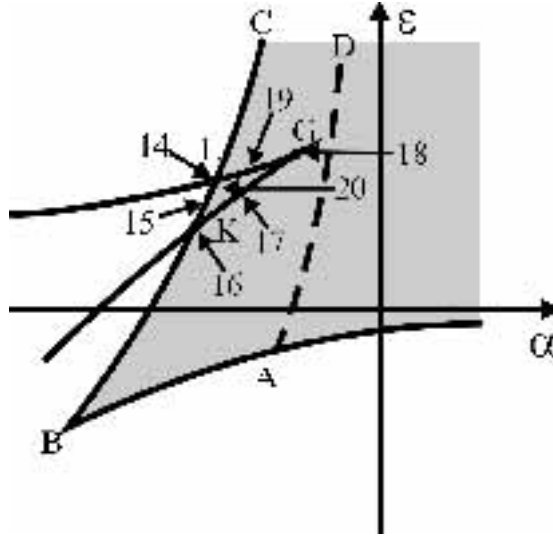


Рис. 7.

точка G лежит внутри полосы, отвечающей случаю 6 (рис.7).

При этом появляется еще семь случаев расположения корней (табл. 3). Как и 13-й, все они реализуются при $\alpha < 0$

2.2 Случай равных масс

При равных массах $m_2 = 0$. В этом случае запишем для μ уравнения, аналогичные (52), (53), в результате чего имеем:

$$\begin{aligned} \alpha\mu^2 - \frac{I\mu^2}{\mu^2-1} - \varepsilon &= 0, \\ \mu \left[\alpha + \frac{I}{(\mu^2-1)^2} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (75)$$

Здесь возможны два случая:

1. $\mu \neq 0$. Тогда, поделив второе из уравнений (75) на μ и исключая из них μ , находим:

$$\varepsilon = \alpha \pm 2|\beta|\sqrt{-\alpha} - I. \quad (76)$$

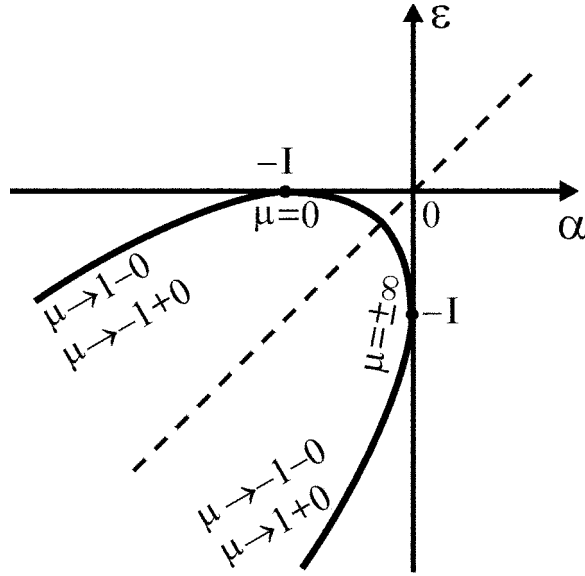


Рис. 8.

Несложно видеть, что это — уравнение двух ветвей параболы, имеющей осью симметрии прямую $\alpha = \varepsilon$, целиком находящейся в третьем квадранте плоскости (α, ε) и касающейся координатных осей в точках $(-I, 0)$, $(0, -I)$ (рис.8).

Нижняя ветвь (знак “—” в (76)) соответствует интервалам $\mu < -1$, $\mu > 1$, причем при $\mu \rightarrow \pm 1$, $\alpha \rightarrow -\infty$, а при $\mu \rightarrow \pm\infty$ $\alpha \rightarrow -0$, $\varepsilon \rightarrow -I - 0$, как следует из (75). Так как, согласно (64) $\frac{d\varepsilon}{d\alpha} = \mu^2 \geq 0$, то реализуется только та часть верхней ветви параболы (со знаком “+” в (76)), которая имеет неотрицательный наклон. Это условие выполняется, как следует из (76), при $\alpha \leq -I$. На этой ветви $-1 < \mu < 1$, причем при $\mu \rightarrow \pm 1$ $\alpha \rightarrow -\infty$, $\varepsilon \rightarrow -\infty$, а при $\mu \rightarrow 0$ $\alpha \rightarrow -I - 0$, $\varepsilon \rightarrow -0$.

2. $\mu = 0$. Из первого уравнения (75) следует, что $\varepsilon = 0$. Таким образом, в состав кривой кратных корней кроме параболы (76) входит и ось абсцисс. Точка G с координатами $\alpha = -I$, $\varepsilon = 0$ — точка раз-

ветвления. Выясним расположение этой точки относительно кривой (54) при $\lambda > 1$. Эта кривая пересекается с прямой $\varepsilon = 0$ в точке Q , абсцисса которой в соответствии с (54) определяется уравнениями:

$$\alpha_Q = -\frac{2}{\lambda} - \frac{I}{(\lambda^2 - 1)^2}, \quad \frac{2}{I} = \frac{\lambda^3}{(\lambda^2 - 1)^2}. \quad (77)$$

Поскольку на этой ветви $\lambda > 1$, то из второй формулы (77) следует, что при $I \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow 1$. Выразив из того же соотношения $\frac{1}{(\lambda^2 - 1)^2}$ и подставив его в первую формулу из (77), устанавливаем, что

$$\alpha_Q = -\frac{2}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{\lambda^2} \right). \quad (78)$$

В этом случае $\lim_{I \rightarrow 0} \alpha_Q = -4$. Следовательно, при $I \rightarrow 0$ точка Q стремится к точке $(-4, 0)$, в то время, как G — к точке $(0, 0)$ и при достаточно малом I , G окажется правее кривой (54) (на рис.5 это — ветвь MC).

В то же время из (77) следует, что при $I \rightarrow \infty$, $\lambda \rightarrow \infty$, $\alpha_Q \rightarrow 0$ и при достаточно большом I точка разветвления лежит левее MC . При непрерывном изменении I найдется такое I_0 , что точка G совпадет с Q и окажется на MC . Следовательно, в (77) $\alpha_Q = -I_0$, $I = I_0$. Решая полученную систему, можно отыскать

$$I_0 = \frac{8}{9}\sqrt{3}, \quad \lambda = \sqrt{3}. \quad (79)$$

Итак, при $m_2 = 0$ линиями кратных корней полинома $M(\mu)$ будут верхняя ветвь параболы (76) и ось $\alpha = 0$ (рис.9).

Анализ, аналогичный проведенному для случая $m_2 > 0$, показывает, что $M(\mu) \geq 0$ при $-1 \leq \mu \leq 1$ в заштрихованной области рис.9.

Проводя линию MC (см. рис. 10), представляющую ветвь кривой кратных корней полинома $L(\lambda)$ при $\lambda > 1$, и учитывая, что в этом

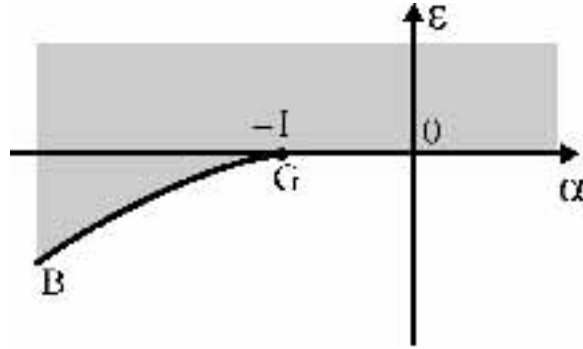


Рис. 9.

интервале значений $L(\lambda) \geq 0$ справа от MC , мы получаем множества точек (α, ε) , отвечающие возможным движениям. На рис. 9 и аналогичных ему рис. 10, 11, 12 они заштрихованы. Как мы установили ранее, здесь необходимо различать три случая.

1. $I > I_0$ (рис. 10). Как и при $m_2 > 0$, отметим на чертеже числами множества точек (α, ε) , в пределах каждого из которых движение возможно и взаимное расположение корней основных полиномов неизменно. При этом будем продолжать нумерацию, начатую в § 2.1. Применим описанный ранее метод передвижения по прямым $\alpha = const$, учитывая, что парабола (74) после замены $\lambda \rightarrow \mu$, $m_1 \rightarrow m_2 = 0$ имеет ось симметрии $\alpha = 0$, а прямая (64) – горизонтальна: $u = -\varepsilon$. Поэтому теперь корни $M(\mu)$ симметричны относительно оси $\mu = 0$. Для нумерованных множеств на рис. 10 этим методом выявляются 2 новых типа сочетаний взаимного расположения корней основных полиномов (табл. 3). Реальным движениям соответствуют заштрихованные интервалы λ, μ , а также жирные точки.
2. $I = I_0$. В этом случае точка G находится на линии MC (рис. 11). Ей отвечает случай 23, когда основным полином $M(\mu) = -\frac{8}{9}\sqrt{3}\mu^4$.

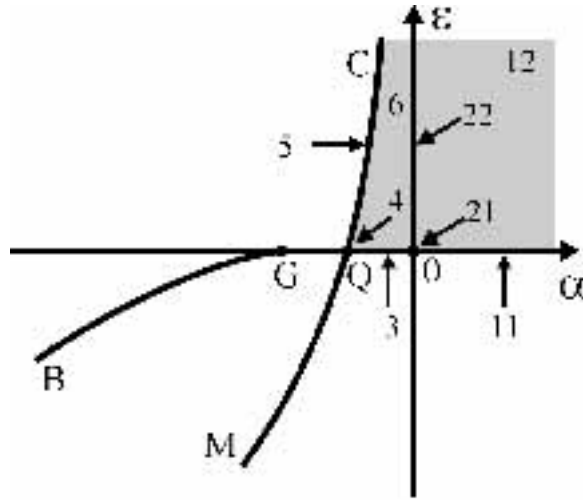


Рис. 10.

Таким образом, он имеет четырехкратный корень $\mu = 0$.

3. $I < I_0$. Точка G оказывается правее линии MC (рис.12). Это соответствует появлению еще трех новых случаев расположения корней.

Обратимся снова к рис.12. Верхняя ветвь параболы (линия BG) (76) может быть задана параметрически. Из (75) следует, что параметрические уравнения получаются из соотношений (54):

$$\alpha^{(1)} = -\frac{I}{(1 - \mu^2)^2}, \quad \varepsilon^{(1)} = -\frac{I\mu^4}{(1 - \mu^2)^2}. \quad (80)$$

При $|\mu| < 1$ эти уравнения и представляют линию BG . Ветвь кривой кратных корней полинома $L(\lambda)$ для $-1 < \lambda < 0$ (линия TV на рис.5) задается уравнениями (54), где положено

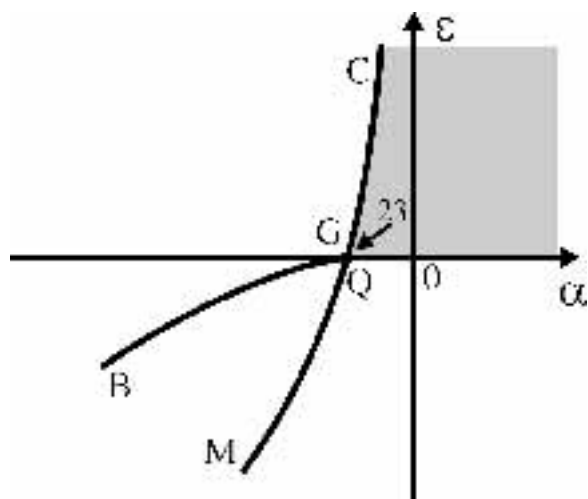


Рис. 11.

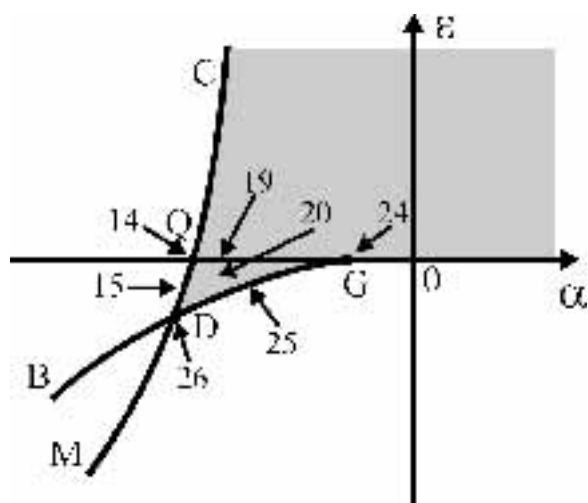


Рис. 12.

$m_1 = 2$:

$$\alpha^{(2)} = -\frac{2}{\lambda} - \frac{I}{(\lambda^2 - 1)^2}, \quad \varepsilon^{(2)} = 2\lambda - \frac{I\lambda^4}{(\lambda^2 - 1)^2}. \quad (81)$$

Далее пусть $\alpha^1 = \alpha^2$. Тогда из (80) и (81), так как $\lambda < 0$ находим:

$$\frac{I}{(\lambda^2 - 1)^2} - \frac{I}{(1 - \mu^2)^2} = -\frac{2}{\lambda} > 0,$$

Следовательно, $\lambda^2 > \mu^2$ (поскольку $\lambda^2 < 1$, $\mu < 1$), и

$$\varepsilon^{(1)} = -\frac{I\mu^4}{(1 - \mu^2)^2} > -\frac{I\lambda^4}{(\lambda^2 - 1)^2} > 2\lambda - \frac{I\lambda^4}{(\lambda^2 - 1)^2} = \varepsilon^{(2)}.$$

Таким образом, линия TV везде ниже BG и поэтому не может пересечь $\triangle DGQ$.

Из всего выше изложенного следует, что рассмотренными сочетаниями взаимного расположения корней $L(\lambda)$ и $M(\mu)$ все варианты пространственной задачи исчерпываются.

3 Определение областей возможных движений в случае, когда траектории точки P лежат в одной плоскости

Обратимся теперь к случаю задачи двух неподвижных центров, когда движущаяся точка остается в фиксированной плоскости $w = \text{const}$. Очевидно, что поворотом системы координат вокруг оси OX эту плоскость можно совместить с плоскостью $z = 0$ и тем самым положить $w = 0$ при $y \geq 0$ и $w = \pi$ при $y < 0$. Тогда из уравнений (2) следует, что

$$x = \lambda\mu, \quad y = \pm\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}. \quad (82)$$

Поскольку $w = \text{const}$, то из (12) вытекает $\beta = 0$, а это означает, что основные полиномы приобретают вид (16)

$$L(\lambda) = (\lambda^2 - 1)L_1(\lambda), \quad M(\mu) = (\mu^2 - 1)M_1(\mu), \quad (83)$$

причем

$$\begin{aligned} L_1(\lambda) &= \alpha\lambda^2 + 2m_1\lambda - \varepsilon, \\ M_1(\mu) &= \alpha\mu^2 + 2m_2\mu - \varepsilon. \end{aligned} \quad (84)$$

Таким образом, $L(\lambda)$ и $M(\mu)$ имеют по два действительных корня $\lambda_{3,4} = \mp 1$, $\mu_{3,4} = \mp 1$, и анализ сводится к исследованию возможных расположений корней и $L_1(\lambda)$ и $M_1(\mu)$.

3.1 Построение кривых кратных корней полинома $L(\lambda)$

Обратимся теперь к полиному $L(\lambda)$ и рассмотрим различные случаи величины постоянной α .

1. $\alpha > 0$.

Запишем выражения для его корней:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-m_1 \pm \sqrt{m_1^2 + \alpha\varepsilon}}{\alpha}. \quad (85)$$

Если они действительны, то условимся считать $\lambda_1 \leq \lambda_2$ и поскольку $\alpha > 0$, то $\lambda_1 < 0$.

Очевидно, что кривые кратных корней могут быть получены при отыскании условий, когда $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \pm 1$, и, наконец, $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Рассмотрим эти условия отдельно.

(1.1) $\lambda_1 = \lambda_2$. Следовательно,

$$m_1^2 = -\alpha\varepsilon. \quad (86)$$

Это – ветвь гиперболы в четвертом квадранте плоскости (α, ε) .

(1.2) $\lambda_1 = -1$. Из (85) находим:

$$\sqrt{m_1^2 + \alpha\varepsilon} = \alpha - m_1, \quad (87)$$

что возможно, если

$$\alpha \geq m_1 \quad \text{и} \quad \varepsilon \geq -\frac{m_1^2}{\alpha}. \quad (88)$$

Решая уравнение (87), получаем

$$\varepsilon = \alpha - 2m_1. \quad (89)$$

Учитывая условия (88), находим, что формула (89) задает полупрямую с $\alpha \geq m_1$, то есть она касается в своем начале $\alpha = m_1, \varepsilon = -m_1$ гиперболы (86).

(1.3) $\lambda_2 = -1$. По формуле (85) получим

$$\sqrt{m_1^2 + \alpha\varepsilon} = m_1 - \alpha. \quad (90)$$

Для этого необходимо, чтобы

$$0 < \alpha \leq m_1, \quad \varepsilon \geq -\frac{m_1^2}{\alpha}. \quad (91)$$

Решение уравнения (90) вновь дает выражение (89), которое совместно с найденными условиями определяет полуоткрытый отрезок

$$0 < \alpha \leq m_1, \quad -2m_1 < \varepsilon \leq -m_1, \quad (92)$$

касающийся в своем конце $\alpha = m_1$, $\varepsilon = -m_1$ гиперболы (85), продолжая, таким образом, луч (89). Очевидно, что точка касания $\alpha = m_1$, $\varepsilon = -m_1$ соответствует кратному корню $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

(1.4) $\lambda_2 = 1$. Теперь, согласно формуле (85), получаем: $\sqrt{m_1^2 + \alpha\varepsilon} = \alpha + m_1$. Решение этого уравнения определяет полупрямую

$$\varepsilon = \alpha + 2m_1, \quad \alpha > 0. \quad (93)$$

2. $\alpha < 0$.

В этом случае корни $L_1(\lambda)$ можно записать так:

$$\lambda_{1,2} = \frac{m_1 \pm \sqrt{m_1^2 + \alpha\varepsilon}}{-\alpha}. \quad (94)$$

Очевидно, что $\lambda_2 > 0$, ветви кривых кратных корней отвечают случаям: $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_1 = \pm 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Продолжим построение кривой кратных корней.

(2.1) $\lambda_1 = \lambda_2$. Этот случай опять соответствует гиперболе (86), только теперь — ее ветви, лежащей во втором квадранте плоскости (α, ε) .

(2.2) $\lambda_1 = 1$. Из (94) находим:

$$\sqrt{m_1^2 + \alpha\varepsilon} = m_1 + \alpha, \quad (95)$$

а для этого необходимо выполнение неравенств:

$$\varepsilon \leq -\frac{m_1^2}{\alpha}, \quad -m_1 \leq \alpha < 0. \quad (96)$$

Решение уравнения (95) с учетом условия (96) определит отрезок, являющийся продолжением прямой (93) в полуплоскость $\alpha < 0$ до точки $\alpha = -m_1$, $\varepsilon = m_1$, в которой он и касается гиперболы (86).

(2.3) $\lambda_2 = 1$. По формуле (94) теперь находим

$$\sqrt{m_1^2 + \alpha\varepsilon} = -m_1 - \alpha. \quad (97)$$

Это равенство возможно только при

$$\varepsilon \leq -\frac{m_1^2}{\alpha}, \quad \alpha \leq -m_1, \quad (98)$$

и решение уравнения (97) при этих условиях будет соответствовать лучу, касающемуся гиперболы (86) в точке $\alpha = -m_1$, $\varepsilon = m_1$ отвечает, таким образом, кратному корню $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

(2.4) $\lambda_1 = -1$. Из (94) следует $\sqrt{m_1^2 + \alpha\varepsilon} = m_1 - \alpha$, и, решая это уравнение, находим $\varepsilon = \alpha - 2m_1$, что является продолжением прямой (89) в полуплоскость $\alpha < 0$.

3. $\alpha = 0$.

Здесь

$$L_1(\lambda) = 2m_1\lambda - \varepsilon, \quad (99)$$

и корень

$$\lambda_5 = \frac{\varepsilon}{2m_1} \quad (100)$$

может стать кратным, если $\varepsilon = 2m_1$, либо $\varepsilon = -2m_1$, а это — точки пересечения прямых $\alpha = 0$ и, соответственно, (93) и (89).

На основе полученных результатов можно построить все ветви кривой кратных корней полинома $L(\lambda)$.

С этой целью на рис.13 отметим числами области, линии и точки, отвечающие различным вариантам их расположений. Используя метод движения по прямым $\alpha = const$, нетрудно убедиться, что нумерованным множествам точек на рис.13 соответствуют варианты расположения корней $L(\lambda)$, которые собраны в табл. 4.

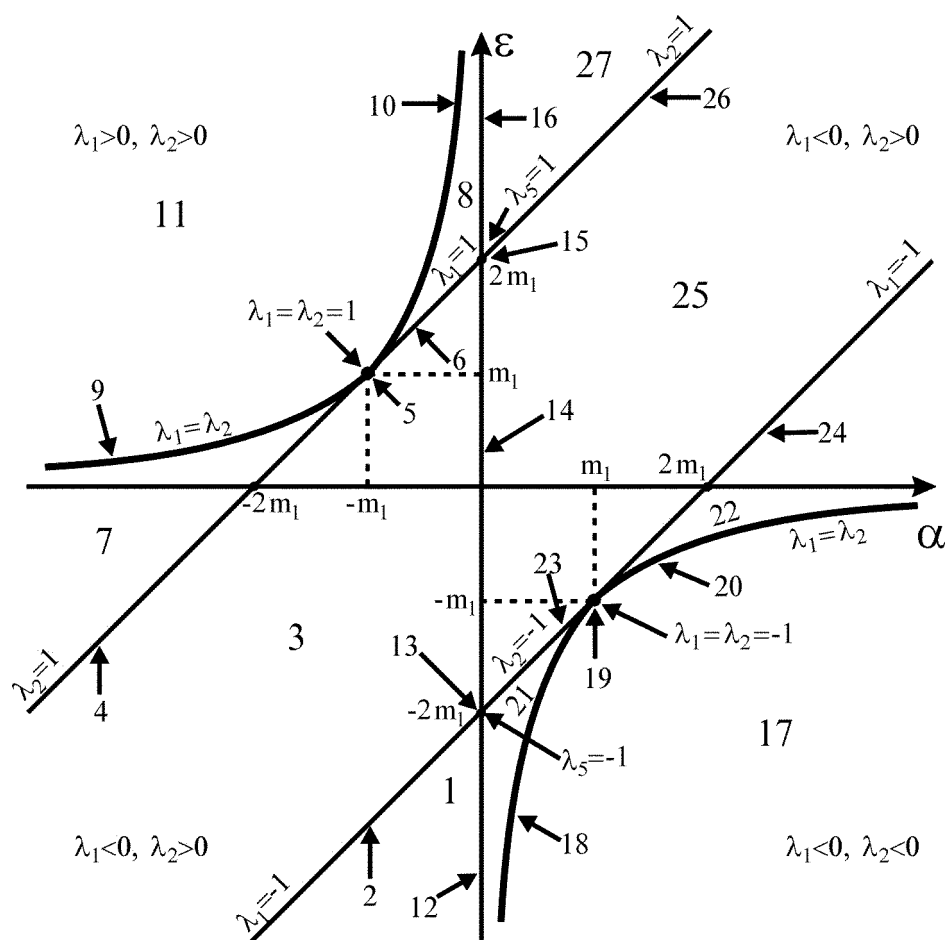


Рис. 13.

Таблица 4.

№	Расположение корней $L(\lambda)$
1	$\lambda_1 < -1, \quad 1 < \lambda_2$
2	$\lambda_1 = -1, \quad 1 < \lambda_2$
3	$-1 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$
4	$-1 < \lambda_1 < \lambda_2 = 1$
5	$-1 < \lambda_1 = \lambda_2 = 1$
6	$-1 < \lambda_1 = 1 < \lambda_2$
7	$-1 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$
8	$1 < \lambda_1 < \lambda_2$
9	$-1 < \lambda_1 = \lambda_2 < 1$
10	$1 < \lambda_1 = \lambda_2$
11	λ_1, λ_2 — КОМПЛ.
12	$\lambda_5 < -1$
13	$\lambda_5 = -1$
14	$1 < \lambda_5 < 1$
15	$\lambda_5 = 1$
16	$\lambda_5 > 1$
17	λ_1, λ_2 — КОМПЛ.
18	$\lambda_1 = \lambda_2 < -1$
19	$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$
20	$1 < \lambda_1 = \lambda_2 < 1$
21	$\lambda_1 < \lambda_2 < -1$
22	$-1 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$
23	$\lambda_1 < \lambda_2 = -1$
24	$\lambda_1 = -1 < \lambda_2 < 1$
25	$\lambda_1 < -1 < \lambda_2 < 1$
26	$\lambda_1 < -1 < \lambda_2 = 1$
27	$\lambda_1 < -1, \quad 1 < \lambda_2$

3.2 Построение кривых кратных корней полинома $M(\mu)$

Как мы уже отмечали ранее, имеет место соотношение $L(\lambda, m_1) = M(\mu, m_2)$ и поэтому кривая кратных корней $M(\mu)$ получается из кривой для $L(\lambda)$ преобразованием подобия с центром в точке O и коэффициентом подобия $k = \frac{m_2}{m_1} < 1$. Обе кривые – для $L(\lambda)$ и для $M(\mu)$ – изображены на рис.14.

Очевидно, что заменой в табл.4 λ_1 и λ_2 на μ_1 и μ_2 мы получим 27 вариантов расположений корней $M(\mu)$. Но следует учесть, что если в случае равных масс вид полинома $L(\lambda)$ не изменяется, то для $M(\mu)$ это не так и его следует рассмотреть дополнительно. Действительно, в этом случае:

$$M(\mu) = (\mu^2 - 1)(\alpha\mu^2 - \varepsilon). \quad (101)$$

Очевидно, что вид кривой кратных корней $M(\mu)$ определится значениями α , ε , при которых $\mu_1 = \mu_2$. Если $\alpha \neq 0$, то $\mu_1 = \mu_2$ при выполнении равенства: $\varepsilon = \alpha$.

Когда $\alpha = 0$, то

$$M(\mu) = \varepsilon(1 - \mu^2), \quad (102)$$

и при $\varepsilon = 0$, $M \equiv 0$, и мы можем формально считать корнем любой кратности произвольное значение μ .

Теперь, передвигаясь по прямым $\alpha = \text{const}$ на рис.15, возможно выявить все случаи расположения корней $M(\mu)$. Если пронумеровать на этом чертеже области с одинаковым расположением корней, то нетрудно установить, что новым множествам точек отвечают возможности, представленные в табл.5.

3.3 Определение областей возможных движений

Итак, плоскость (α, ε) разбивается различными ветвями кривых кратных корней полиномов $L(\lambda)$, $M(\mu)$ на области, в пределах каждой из

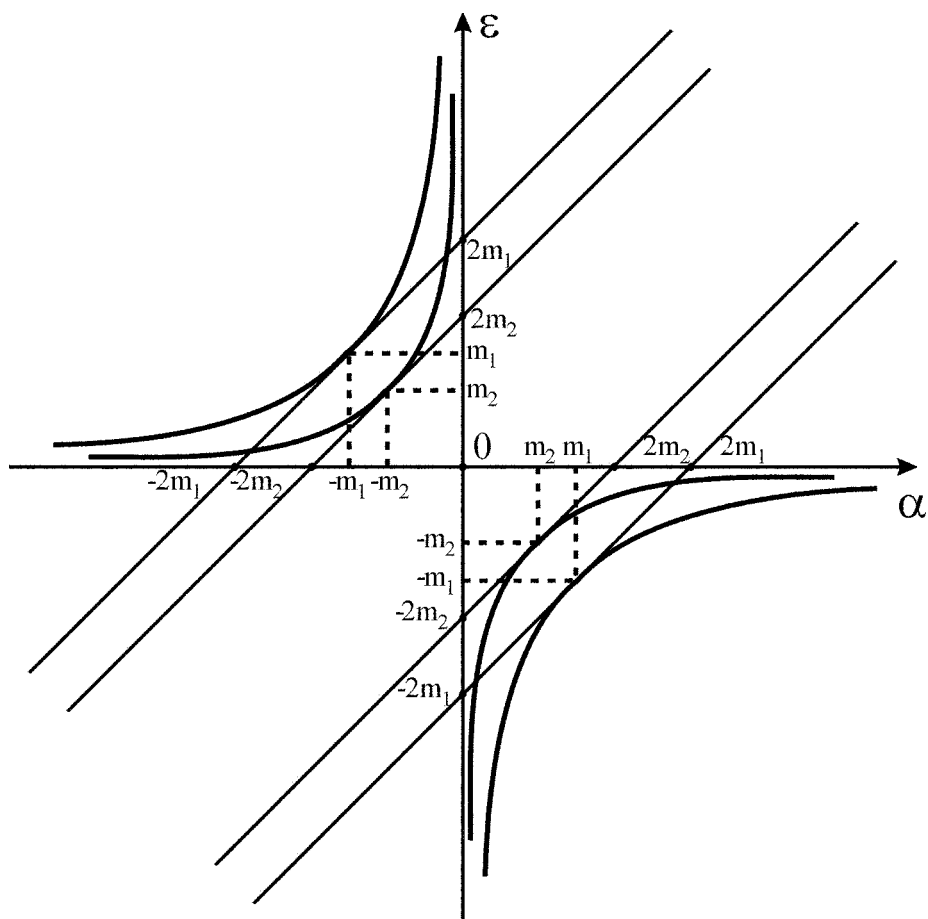


Рис. 14.

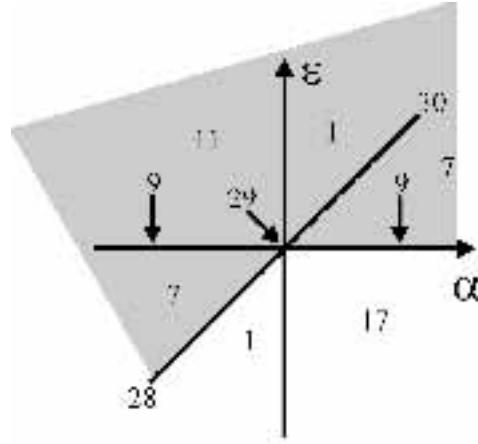


Рис. 15.

Таблица 5.

№	Расположение корней $M(\mu)$
28	$\mu_1 = -1, \quad \mu_2 = 1 (\alpha < 0)$
29	$M(\mu) \equiv 0$
30	$\mu_1 = -1, \quad \mu_2 = 1 (\alpha > 0)$

которых расположение корней качественно одинаково. Если это расположение отвечает реальному движению, то и тип этого движения внутри каждой области один и тот же.

Применим метод передвижения по плоскости (α, ε) вдоль прямых $\alpha = \text{const}$, что позволяет выявить все возможные сочетания расположения корней $L(\lambda)$, $M(\mu)$, отвечающие реальным движениям, для которых необходимо выполнение неравенств

$$L(\lambda) \geq 0, \quad M(\mu) \geq 0, \quad \lambda \geq 1, \quad -1 \leq \mu \leq 1. \quad (103)$$

Рассмотрим случай неравных масс. Тогда, используя результаты разделов 3.1 и 3.2 и заштриховывая области, в которых выполнены

эти условия, мы получаем 41 множество расположения корней полиномов $L(\lambda)$ и $M(\mu)$ (рис.16).

В случае равных масс мы приходим к классификации расположения корней, представленной на рис.17.

Имея 47 множеств расположений корней $L(\lambda)$ и $M(\mu)$, можно каждое из них представить соответствующими графиками полиномов (табл.6). Заштрихованным участкам и жирным точкам соответствуют интервалы или отдельные значения λ, μ , при которых движения возможны. Если корень имеет определенный знак, то он отмечен (если это не следует непосредственно из чертежа). Для сокращения письма введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha + 2m_1, & A_2 &= \alpha + 2m_2, \\ A_3 &= \alpha - 2m_2, & A_4 &= \alpha - 2m_1, \\ B_1 &= (1 + \sqrt{m})^2, & B_2 &= (1 - \sqrt{m})^2, \end{aligned} \tag{104}$$

так что $A_1 > A_2 > A_3 > A_4$ и $B_1 > B_2$.

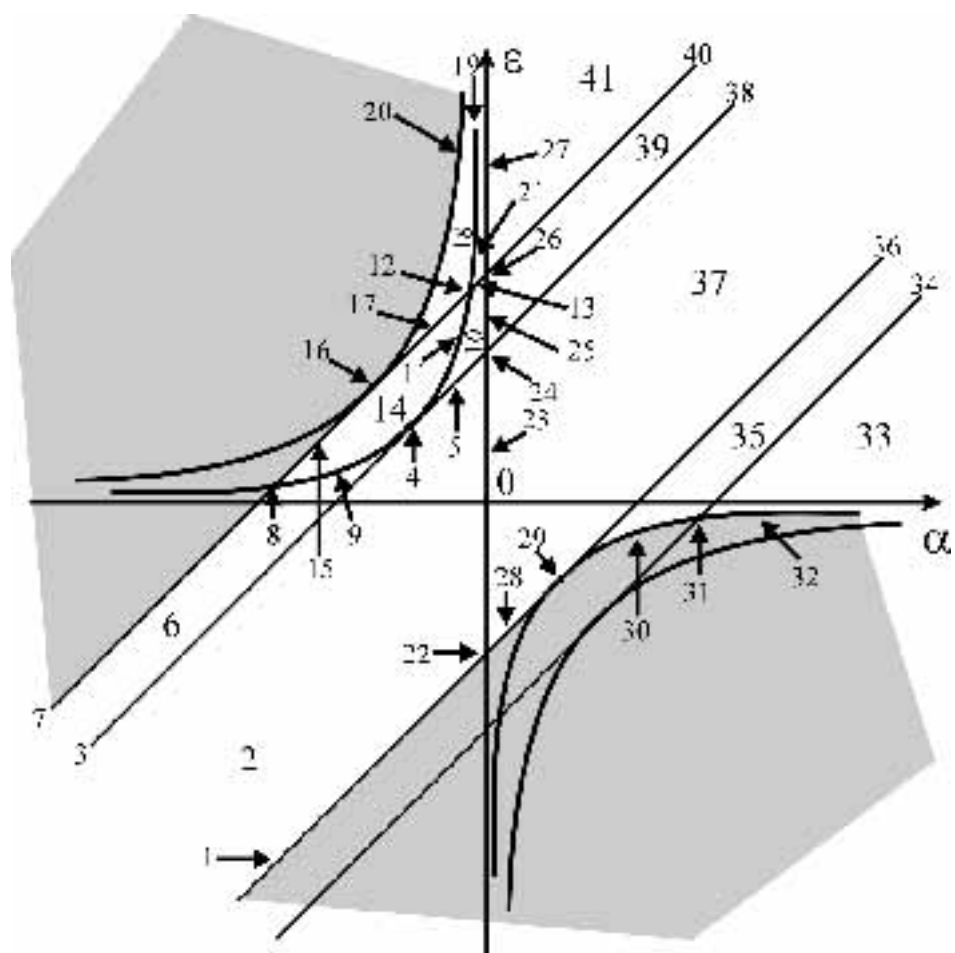


Рис. 16.

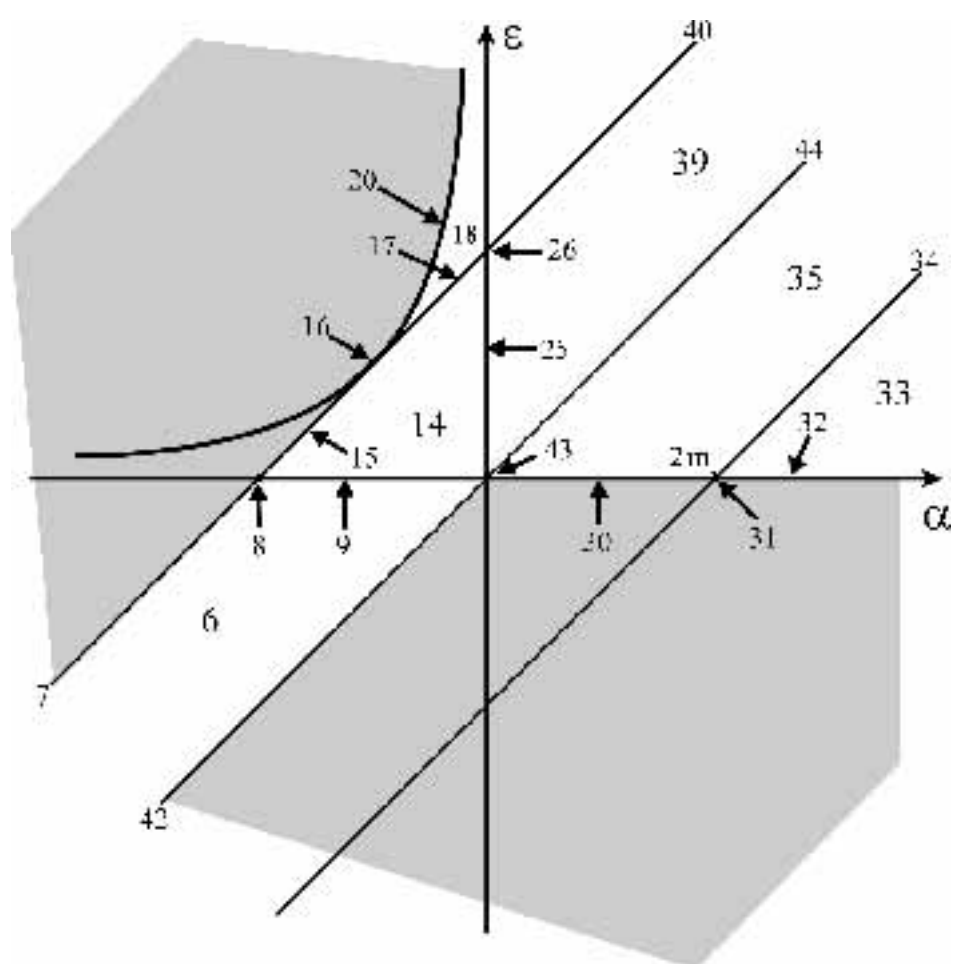


Рис. 17.

Таблица 6.

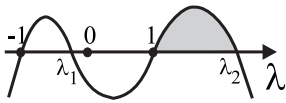
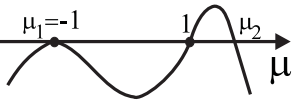
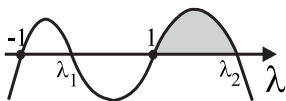
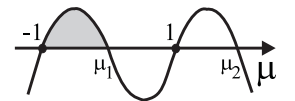

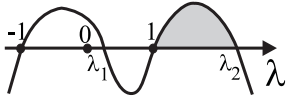
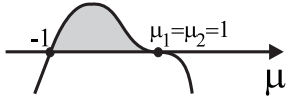
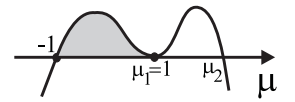
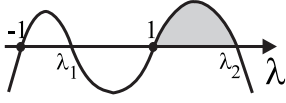
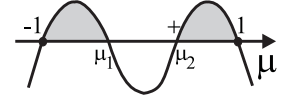
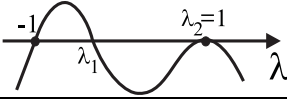
N	Множества на плоскости (α, ε)	$L(\lambda)$	$M(\mu)$
$\alpha < 0$			
1	Полупрямая $\varepsilon = A_3$		
2	Открытая полубесконечная полоса: $A_3 < \varepsilon < A_2$		
3	Полупрямая $\varepsilon = A_2, \alpha < -m_2$		
4	Точка $\varepsilon = m_2, \alpha = -m_2$		
5	Открытый отрезок прямой: $\varepsilon = A_2, \alpha > -m_2$		
6	Открытая полубесконечная полоса, ограниченная полу- прямыми и дугой гиперболы: $A_2 < \varepsilon < A_1, \varepsilon < -\frac{m_2^2}{\alpha},$ $\alpha < -m_2$		
7	Полупрямая $\varepsilon = A_1, \alpha < -B_1$		

Таблица 6. (продолжение)

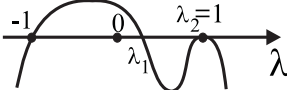
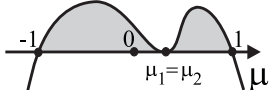
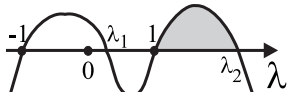
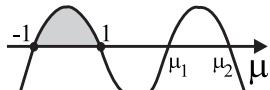
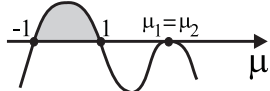
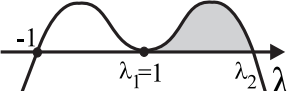
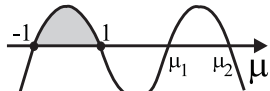
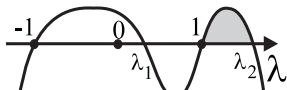
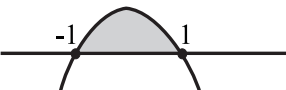
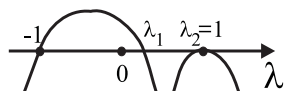
N	Множества на плоскости (α, ε)	$L(\lambda)$	$M(\mu)$
8	Точка $\varepsilon = B_2, \alpha = -B_1$		
9	Открытая дуга гиперболы: $\alpha\varepsilon = -m_2^2, -B_1 < \alpha < -m_2$		
10	Криволинейная трапеция: $A_2 < \varepsilon < A_1, \varepsilon < -\frac{m_2^2}{\alpha},$ $\alpha > -m_2$		
11	Открытая дуга гиперболы: $\alpha\varepsilon = -m_2^2, -m_2 < \alpha < -B_1$		
12	Точка $\varepsilon = B_1, \alpha = -B_2$		
13	Открытый отрезок прямой: $\varepsilon = A_1, \alpha > -B_2$		
14	Сегмент между прямой и гиперболой: $-\frac{m_2^2}{\alpha} < \varepsilon < A_1,$ $\alpha < 0$		
15	Открытый отрезок прямой: $\varepsilon = A_1, -B_1 < \alpha < -m_1$		

Таблица 6. (продолжение)

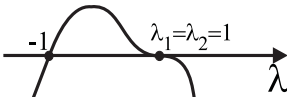
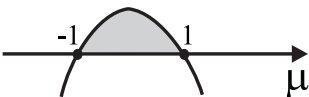
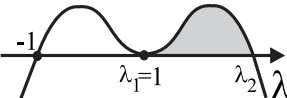
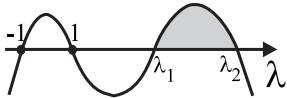
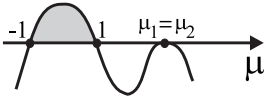
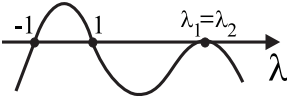
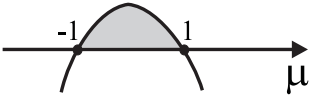
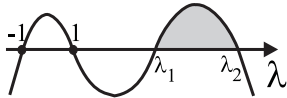
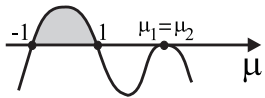
N	Множества на плоскости (α, ε)	$L(\lambda)$	$M(\mu)$
16	Точка $\varepsilon = m_1, \alpha = -m_1$		
17	Открытый отрезок прямой: $\varepsilon = A_1, -m_1 < \alpha < -B_2$		
18	Криволинейная открытая полубесконечная полоса между двумя гиперболами: $-\frac{m_2^2}{\alpha} < \varepsilon < \frac{m_2^2}{\alpha}, \varepsilon > A_1, \alpha > -m_1$		
19	Открытая полубесконечная дуга гиперболы: $\alpha\varepsilon = -m_2^2, \alpha > -B_2$		
20	Открытая полубесконечная дуга гиперболы: $\alpha\varepsilon = -m_1^2, \alpha > -m_1$		
21	Криволинейная открытая полубесконечная полоса между гиперболой и прямой $\alpha = 0$: $A_1 < \varepsilon < \frac{m_2^2}{\alpha}, \alpha > -B_2$		

Таблица 6. (продолжение)

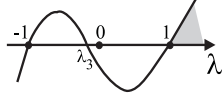
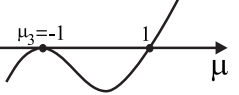
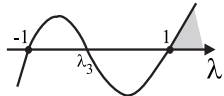
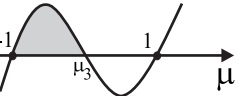
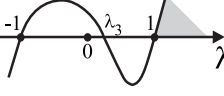
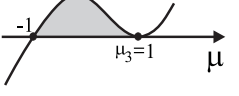
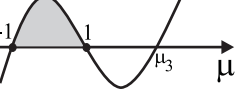
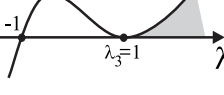
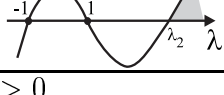
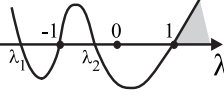
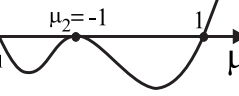
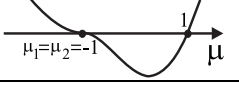
N	Множества на плоскости (α, ε)	$L(\lambda)$	$M(\mu)$
$\alpha = 0$			
22	Точка $\varepsilon = -2m_2$		
23	Открытый отрезок прямой: $-2m_2 < \varepsilon < 2m_2$		
24	Точка $\varepsilon = 2m_2$		
25	Открытый отрезок: $2m_2 < \varepsilon < 2m_1$		
26	Точка $\varepsilon = 2m_1$		
27	Полупрямая $\varepsilon > 2m_1$		
$\alpha > 0$			
28	Открытый отрезок: $\varepsilon = A_3, \alpha < m_2$		
29	Точка $\varepsilon = -m_2, \alpha = m_2$		

Таблица 6. (продолжение)

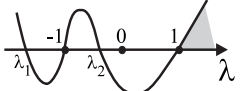
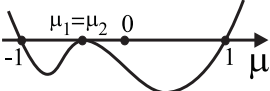
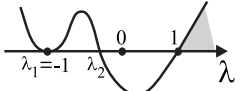
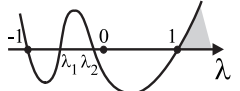
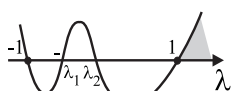
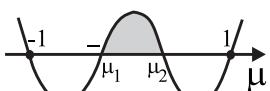
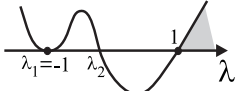
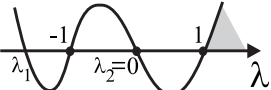
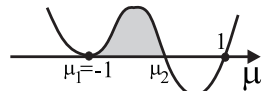
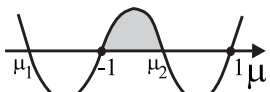
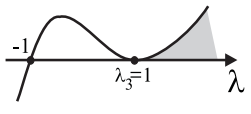
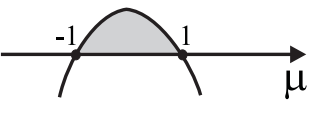
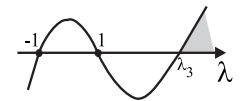
N	Множества на плоскости (α, ε)	$L(\lambda)$	$M(\mu)$
30	Открытая дуга гиперболы: $\alpha\varepsilon = -m_2^2, m_2 < \alpha < B_1$		
31	Точка $\varepsilon = -B_2, \alpha = B_1$		
32	Открытая полубесконечная дуга гиперболы: $\alpha\varepsilon = -m_2^2, \alpha > B_1$		
33	Открытый криволинейный угол между прямой и гиперболой: $-\frac{m_2^2}{\alpha} < \varepsilon < A_4, \alpha > B_1$		
34	Полупрямая $\varepsilon = A_4, \alpha > B_1$		
35	Открытая полубесконечная полоса между двумя прямыми и гиперболой: $A_4 < \varepsilon < A_3, \varepsilon > -\frac{m_2^2}{\alpha}, \alpha > m_2$		
36	Полупрямая $\varepsilon = A_3, \alpha > m_2$		
37	Открытая полубесконечная полоса: $A_3 < \varepsilon < A_2$		

Таблица 6. (продолжение)

N	Множества на плоскости (α, ε)	$L(\lambda)$	$M(\mu)$
38	Полупрямая $\varepsilon = A_2$		
39	Открытая полубесконечная полоса: $A_2 < \varepsilon < A_1$		
40	Полупрямая $\varepsilon = A_1$		
41	Открытый угол между прямыми: $\varepsilon > A_1, \alpha > 0$		
42	Полупрямая $\varepsilon = \alpha, \alpha < 0$		
43	Точка $\varepsilon = 0, \alpha = 0$		
44	Полупрямая $\varepsilon = \alpha, \alpha > 0$		
45	Открытый отрезок: $0 < \varepsilon < 2m_1, \alpha = 0$		

Таблица 6. (продолжение)

N	Множества на плоскости (α, ε)	$L(\lambda)$	$M(\mu)$
46	Точка $\varepsilon = 2m_1, \alpha = 0$		
47	Полупрямая $\alpha = 0, \varepsilon > 2m_1$		

Список литературы

- [1] Euler L. Histoire de l'Academie royale des Sciences et des belles lettres de Berlin //1760, **16**, p.228-249.
- [2] Lagrange J.L. Recherches sur le mouvement d'un corps qui est attire vers deux centres fixes //Miscellanea Taurineusia t.4, p.188-215, 1766-1769.
- [3] Шарлье К. Небесная механика. М.: "Наука", 1966, с.100-135.
- [4] Бадалян Г.К. //Астрон.журн., 1934, т.11, № 4, с.346-378.
- [5] Алексеев В.М. Бюлл.ИТА, 1965, т.10, № 4, с.241-271.
- [6] Герасимов И.А. Функции Вейерштрасса и их приложения в механике и астрономии М., Изд. МГУ, 1990, 152 с.
- [7] Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: "Наука", 1975, 431 с.

Отождествление звезд на пластинках в пределах зон Астрографического каталога.

В.Н.Семенцов

Аннотация

Рассмотрены способы отождествления звезд на разных пластинках “Карты неба” с использованием однородной оценки точности, а также распределения соседей данной звезды на пластинке.

Abstract Various methods of star identification on plates of Astrographic Catalog are discussed.

Введение

Астрографический каталог, наблюдения которого производились с 1891 по 1948 годы, до настоящего времени входит в число крупнейших позиционных каталогов. Координатная информация, содержащаяся в нем, активно используется для уточнения собственных движений современных спутниковых каталогов [4, 10, 11, 12].

Однако, создание Астрографического каталога как единого целого, наталкивается на определенные трудности. Так, в издании, осуществленном военно-морской обсерваторией США [9], в каталоге отождествлены с GSC [6] только звезды, входящие в каталог ТУСНО [2], т.е. менее половины звезд. Очевидно, что в действительности практически все звезды АК присутствуют в каталоге GSC, но их корректное отождествление затруднительно. Оценка точности координат в АК (среднеквадратичное отклонение по опорным звездам на уровне $0.3''$ [11]) представляется избыточно строгим критерием, особенно при

значительном разбросе эпох разных пластинок и априорном незнании собственных движений.

В настоящей работе рассмотрены способы увязки данных о координатах звезд, измеренных на разных пластинках, по возможности без использования внешней информации.

1 Отождествление звезд внутри зоны с использованием однородного критерия

Простейший способ сопоставить изображения звезд на разных пластинках — это задать некоторый постоянный радиус отождествления, и рассмотреть поведение получающегося списка объектов в зависимости от величины этого радиуса на разном материале. В настоящей работе одно значение радиуса использовалось для отождествления в пределах зоны Астрографического каталога.

В таблице 1 приведены числа звезд, получившиеся в разных зонах при разных значениях радиуса отождествления. Из таблицы видно, и это показано на рис.1, что существенное уменьшение числа объектов заканчивается при изменении радиуса отождествления от 2 до 5". Из этого интервала его и следует выбирать, не забывая о том, что существует незначительное число быстро движущихся звезд, а также некоторый процент оптических двойных с расстоянием между компонентами, меньше нескольких секунд, отождествление которых таким способом, конечно приведет к серьезным ошибкам. Другой аспект выбора радиуса отождествления мы рассмотрим в разделе, посвященном распределению звезд на отдельных пластинках.

Любопытно также сравнить разные зоны в плане распределения числа изображений, объединяемых в один объект. Соответствующая статистика при радиусе отождествления 3" приведена в табл.2. По-

Таблица 1. Число объектов в различных зонах Астрографического каталога в зависимости от радиуса отождествления

Зона Карты неба	Число изобр.	Радиус отождествления, "				
		0.7	1	2	5	10
Гринвичская	322133	247736	215843	182086	178879	178715
Ватиканская	479975	394876	349017	271448	256020	255714
Катанская	319991	243117	213320	172515	161837	161150
Хельсинкская	284655	204928	180675	161000	159196	159108
Хайдарабад (с)	242543	194907	174762	151894	148910	148797
Юкльская	158651	141809	133155	120034	116847	116670
Потсдамская	144001	121441	115111	110069	109322	109230
Оксфордская	631791	517395	460412	378438	364253	363868
Парижская	436489	319556	284585	255567	252924	252712
Бордоская	355059	263703	240090	223139	221778	221395
Тулузская	433083	341243	307249	273794	269515	269010
Алжирская	330449	250435	226143	202513	199514	199374
Сан-Фернандо	346092	302549	280730	241442	225981	225071
Такубайская	516609	406822	362345	317174	311483	311101
Хайдарабад (ю)	521867	431020	386059	313885	293936	293223
Кордовская	467395	407001	373030	318784	307462	307091
Пертская	604315	481548	422861	348648	338125	337838
Капская	901229	784436	714660	583765	545031	543877
Сиднейская	743979	633510	570746	459426	428216	426748
Мельбурнская	392584	302479	265878	223791	216775	216068
Всего	8632890	6990511	6276671	5146682	5106004	5096760

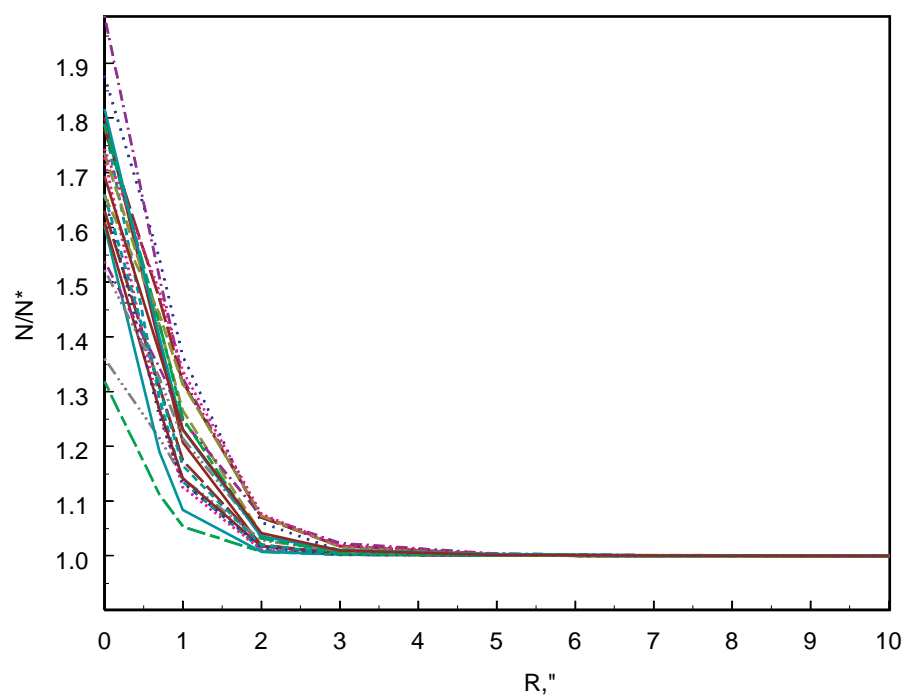


Рис. 1. Относительное уменьшение числа объектов в различных зонах Астрографического каталога в зависимости от радиуса отождествления

сколько центры пластинок по небесной сфере на всех обсерваториях выбирались одинаковым способом, распределение числа изображений, объединяемых в один объект, может косвенно характеризовать наблюдательный материал. По общим условиям международной программы составления Астрографического каталога, на одну звезду должны были приходиться два изображения. Ближе всего к таким характеристикам наблюдения в Гринвичской зоне. На остальных обсерваториях, видимо, измеряли звезды слишком близкие к предельной звездной величине на пластинке, поэтому естественный технологический разброс фотоэмульсий привел к преобладанию одиночных изображений. Например, при различии предельных величин пластинок в 0.5^m , поскольку, согласно [8], $N_*(V) \propto 3^{V-V_0}$, то число звезд на разных перекрывающихся пластинках может различаться в $3^{0.5} \sim 1.7$ раза.

Объединение более чем 2-х изображений в один объект, видимо, связано со значительным процентом двойных звезд и уже упомянутым разбросом предельных звездных величин пластинок (последним можно объяснить также значительное количество объединений 3-х изображений).

2 О возможности использования для идентификации звезд оценок блеска из Астрографического каталога

После того, как изображения звезд объединены в объекты внутри отдельных зон АК, для получившихся списков можно построить функции светимости, т.е. распределения объектов по звездным величинам. Для того, чтобы большие ошибки оценок звездных величин не заслоняли имеющиеся систематические различия зон, разобьем получающиеся графики на три семейства (см. рис.2). На первом

Таблица 2. Распределение числа изображений, объединяемых в один объект при радиусе отождествления $3''$ в различных зонах Астрографического каталога

Зона Карты неба	Число объединяемых изображений					
	1	2	3	4	5	6
Гринвичская	46044	126941	4496	1228	380	100
Ватиканская	107054	89258	54569	5634	1630	2
Катанская	54842	69611	34699	4342	883	4
Хельсинкская	64204	67495	26034	1422	333	1
Хайдарабад (с)	74735	57878	15201	1356	205	
Юкльская	82804	28398	6345	4		
Потсдамская	79821	25158	4324	203	16	
Оксфордская	164119	145798	51203	4549	853	1
Парижская	116664	95105	37434	3042	1029	
Бордоская	116211	81135	22711	1451	527	1
Тулузская	136270	107975	24708	1061	499	
Алжирская	91923	87179	19648	916	312	
Сан-Фернандо	132363	81373	15523	861	194	
Такубайская	150122	124722	34706	2372	685	2
Хайдарабад (ю)	137144	107100	48005	4748	1502	1
Кордовская	163486	133826	12056	21	1	
Пертская	136451	147915	50228	4301	828	1
Капская	252068	253476	47320	61	1	
Сиднейская	208804	151245	66833	6501	1234	2
Мельбурнская	94103	81958	36450	4778	1038	117
Всего	2409232	2063546	612493	48851	12150	232
	7	8	9	10	11	12
Гринвичская	21	16	67	25	13	3
Катанская	2	1				
Мельбурнская	29	1				
Всего	52	18	67	25	13	3

графике приведены функции светимости зон, показывающих заметный спад в области слабых звезд (Гринвичская, Оксфордская, *Бордоская*¹, южный Хайдарабад, Кордовская, *Пертская*, *Сиднейская*, Мельбурнская). Видимо, измерения в этих зонах производились до предельной звездной величины пластинки, которая на разных пластинках различается примерно на 1^m . Отсюда и получается наблюдаемый спад функции светимости. Различие наклонов функции светимости (например, в Оксфордской и Кордобской зонах), видимо, может быть объяснено особенностями строения областей Галактики, попадающих в эти зоны.

На следующем графике приведены функции светимости наиболее аккуратно, с точки зрения фотометрии, измеренных зон (Ватиканская, *Хельсинкская*, северный Хайдарабад, *Парижская*, *Тулузская*, Алжирская). Точность оценок звездных величин (по характеру поведения функций светимости) порядка 0.5^m . Систематические различия между зонами даже меньше, чем на предыдущем графике. Использование звездных величин из этих зон для целей идентификации не должно приводить к ошибкам.

На последнем графике собраны данные о зонах с наиболее плохо измеренными величинами (*Катанская*, *Юкльская*, *Потсдамская*, *Такубайская*, *Сан-Фернандо*, *Капская*). В некоторых зонах оценки блеска звезд производились с помощью достаточно произвольных опорных шкал, в других — звездные величины были выведены сотрудниками соответствующих обсерваторий из измеренных диаметров по каким-то редуccionным формулам. Ошибки, как легко видеть на графике, имеют грубый и массовый характер. Пользоваться такими звездными величинами даже для целей идентификации крайне опасно.

¹Курсивом выделены зоны, где производилась глазомерная оценка блеска звезд по шкалам, а не с помощью измерения диаметров изображений

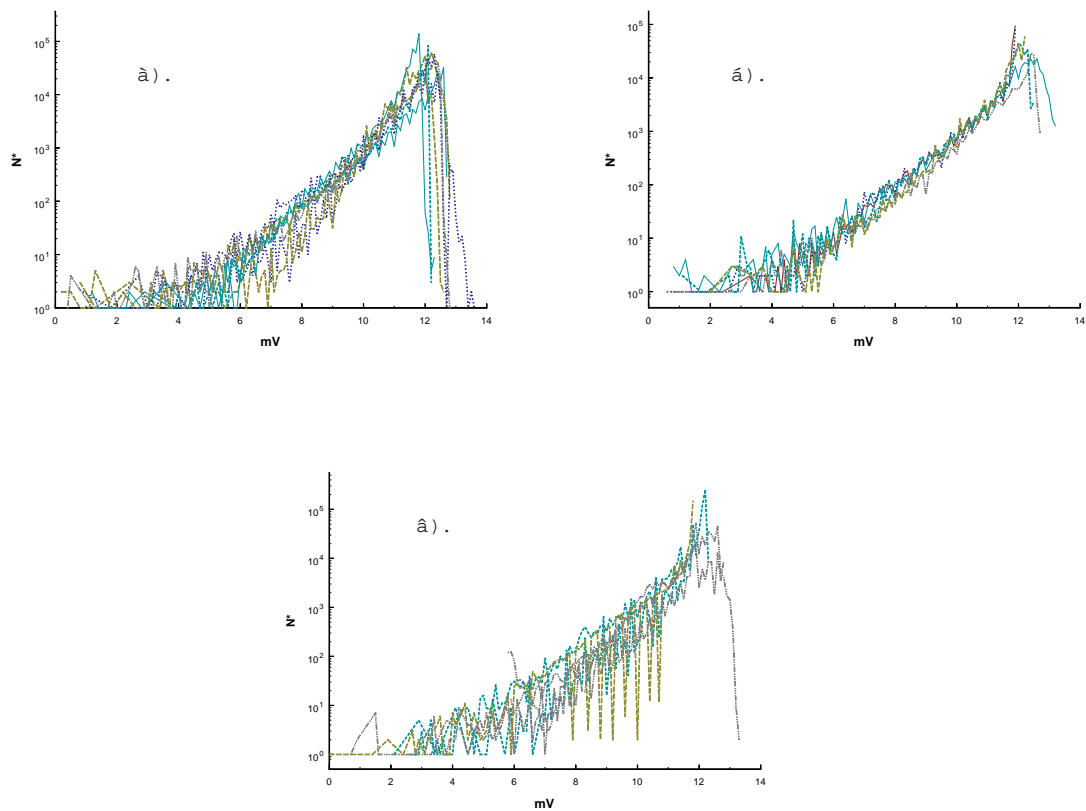


Рис. 2. Функция светимости в различных зонах Астрографического каталога.

3 Распределение ближайших соседей звезды на пластинке

В предположении, что макроскопическая структура на пластинке отсутствует, запишем, следуя Чандрасекару [13], уравнение для вероятности $w(r)$ обнаружить соседнюю звезду внутри кольца радиуса r :

$$w(r) = \left[1 - \int_0^r w(r) dr \right] 2\pi r n, \quad (1)$$

где n – поверхностная плотность звезд. Заменив переменную w на $z = w(r)/(2\pi r n)$ и продифференцировав (1), получим уравнение:

$$\frac{dz(r)}{dr} = -2\pi r n \cdot z(r), \quad (2)$$

решение которого, очевидно, даст распределение $w(r)$ на бесконечной плоскости:

$$w(r) = 2\pi r n \cdot e^{-\pi r^2 n}. \quad (3)$$

Среднее расстояние между звездами и его дисперсия при этом будут

$$\begin{aligned} D &= \int_0^\infty r \cdot w(r) dr = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x} dx = \frac{1}{2\sqrt{n}}, \\ \sigma_D^2 &= \int_0^\infty (r - D)^2 \cdot w(r) dr = \int_0^\infty \frac{x}{\pi n} \cdot e^{-x} dx - D^2 = \frac{1}{\pi n} - \frac{1}{4n}. \end{aligned} \quad (4)$$

Заметим, что конечные размеры пластинки приведут к возникновению поправки:

$$D_{\text{ideal}} - D_{\text{real}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \int_{\pi R_{\text{max}}^2 n}^\infty x \cdot e^{-x} dx = \Gamma(2, \pi R_{\text{max}}^2 n), \quad (5)$$

где $\pi R_{max}^2 n \approx N_*$ — порядка числа звезд на пластинке. Неполная гамма-функция при больших вещественных значениях второго аргумента допускает асимптотическое разложение [1]:

$$\Gamma(2, z) \approx ze^{-z} \left[1 + \frac{1}{z} \right] \propto N_* e^{-N_*}, \quad (6)$$

т.е. пренебрежимо мала для большинства пластинок.

В таблице 3 приведены параметры распределения расстояния до ближайшего соседа ρ , полученные по пластинкам разных зон Астрографического каталога в полиномиальной модели:

$$\rho = \frac{\rho_0}{N_*^\alpha}. \quad (7)$$

Примечания проиллюстрированы рисунком 3. Ошибка среднего при расчете ρ на пластинках разных зон АК хорошо аппроксимируется выражением

$$\varepsilon_\rho \approx (2500 \div 3000) \cdot N_*^{-1}. \quad (8)$$

Существование вышеописанных зависимостей расстояний до ближайших соседей звезды представляется достаточно очевидным свидетельством пуассоновского характера распределения звезд по небесной сфере (на масштабах фотопластинки). Рассмотрим теперь распределение соседей данной звезды на таких масштабах, где появление других звезд вообще маловероятно, если исходить из зависимости (3):

$$\rho < \frac{D}{\sqrt{N_* - 1}} \sim \sigma_D. \quad (9)$$

Поскольку таких звезд, действительно, относительно мало, представление о поведении функции распределения на малых расстояниях можно получить, объединяя в одну выборку расстояния, измеренные на разных пластинках. В этой процедуре есть одна тонкость. Объединяя в одну выборку последовательность **абсолютных**

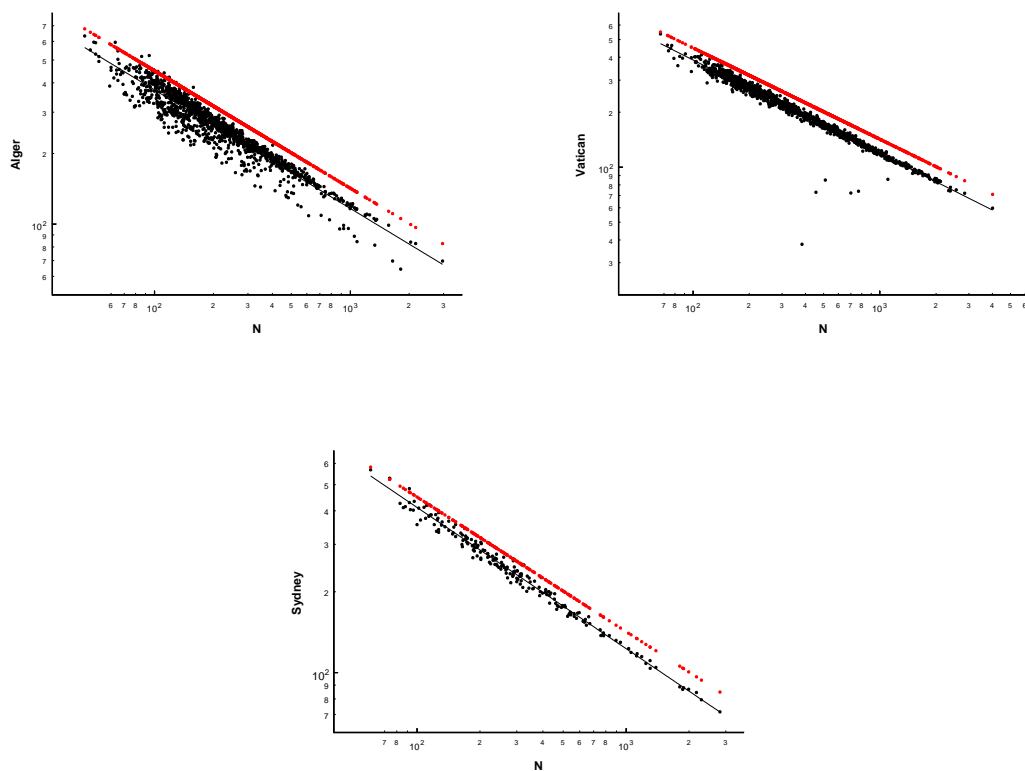


Рис. 3. Зависимость расстояния до ближайшего соседа на пластинках некоторых зон АК. Чуть выше реальных зависимостей проходит кривая для Пуассоновского распределения с условной нормировкой (см. табл.3)

Таблица 3. Параметры зависимости расстояния до ближайшего соседа в различных зонах АК

Зона	Параметры в (7)		Примечания
Карты неба	$\rho_0, "$	α	
Гринвичская	4189	0.5312	Группа пластинок сильно отличается
Ватиканская	4099	0.5127	
Катанская	4517	0.5247	
Хельсинкская	4020	0.5099	
Хайдарабад (с)	4284	0.5155	
Юкльская	4176	0.5134	
Потсдамская	3983	0.5136	
Оксфордская	3952	0.5022	
Парижская	4318	0.5182	
Бордоская	4147	0.5126	
Тулузская	4111	0.5126	
Алжирская	3183	0.5047	
Сан-Фернандо	4620	0.5286	
Такубайская	4515	0.5221	
Хайдарабад (ю)	4655	0.5208	
Кордовская	4281	0.5251	Есть 2 последовательности
Пертская	4552	0.5227	
Капская	4271	0.5226	
Сиднейская	4622	0.5221	
Мельбурнская	5038	0.5354	Удалось просчитать не всю зону
Теория	4500	0.5	

расстояний, мы получим очень красиво выглядящий, но абсолютно нефизичный результат. Каждый может проверить, что при этом зависимость будет выглядеть очень похоже на распределение χ^2 , чего быть не может. Так как нас интересуют в конечном итоге вероятности найти звезду-соседа на различных расстояниях от данной звезды, мы должны нормировать это расстояние таким образом, чтобы одинаковым значениям нового нормированного расстояния соответствовали **одинаковые вероятности** найти звезду-соседа на **разных** пластинках.

Проще всего добиться указанного поведения объединенной функции распределения, перейдя к относительным расстояниям на каждой пластинке, — поделив все расстояния на данной пластинке на σ_D .

Результат применения подобной процедуры показан на рисунке 4, где все зоны Астрографического каталога разбиты на две группы: большая часть зон, показывающая заметный спад числа соседей при приближении относительного расстояния к 0 (за исключением Ватиканской зоны, демонстрирующей выброс в нуле) и зон северный Хайдарабад, Юккль, Потсдам и Сидней, для которых абсолютное число близких соседей звезды примерно в 3 раза меньше, чем в остальных зонах.

Следует заметить, что число таких ближайших соседей составляет примерно по 3000 изображений звезд в каждой зоне, т.е. общая выборка их для всех зон АК достигает 60000 изображений звезд, или, с учетом перекрытия пластинок, около 40000 двойных звезд во всем Астрографическом каталоге. (При наборе статистики расстояние между каждой парой изображений звезд учитывалось один раз.)

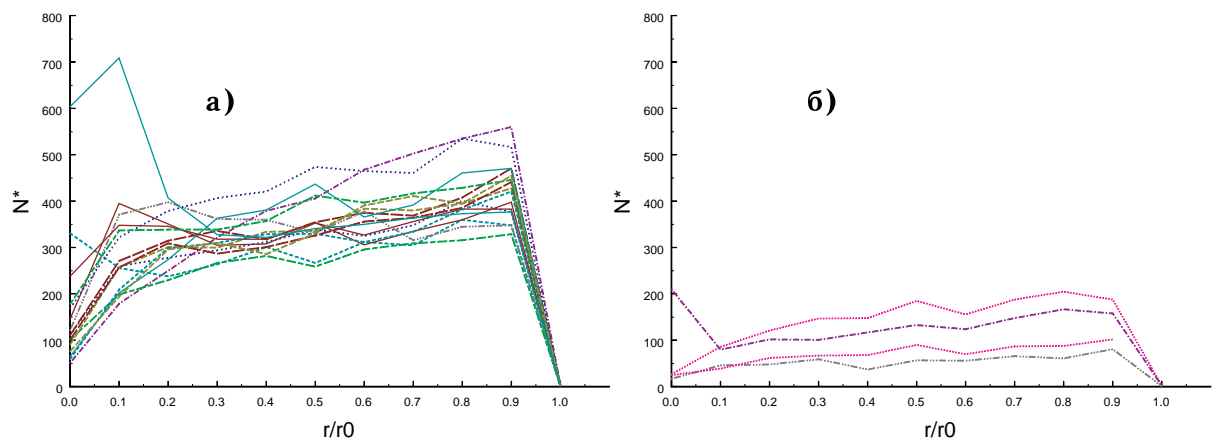


Рис. 4. Число ближайших соседей данной звезды в разных зонах АК. Распределения не нормированы по y , а по x приведены к интервалу $[0; \varepsilon_\rho]$. На рисунке б) отдельно приведены кривые для зон северный Хайдарабад, Юккль, Потсдам и Сидней. На рисунке а) в области малых расстояний резко выделяется Ватиканская зона.

Выводы

Приведенные статистические зависимости позволяют более корректно произвести отождествление изображений одних и тех же звезд на отредуцированных пластинках “Карты неба”. В качестве первого приближения в большинстве работ вполне уместно применение однородного критерия – единого для всей зоны АК допустимого расстояния $\Delta\rho$ между изображениями звезды на разных пластинках. При выборе $\Delta\rho \in [2 \div 5]$ в Астрографическом каталоге получается примерно 4.6 миллиона звезд, что близко к результатам [9].

Характер поведения функции светимости звезд в разных зонах АК показывает, сколь велики ошибки фотометрии в каталоге в его нынешнем состоянии. Представляется более безопасным воздерживаться от использования оценок блеска звезд при отождествлении изображений на пластинках, принадлежащих разным широтным зонам.

Закономерности распределения изображений звезд на пластинках позволяют разрешать коллизии при отождествлении достаточно плотных групп звезд между разными пластинками. Работа эта требует значительно больших вычислительных затрат, чем уже проведенная, и ее результаты будут опубликованы в следующей статье.

Настоящая работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 00-02-16282, “Стандарт системы координат и фотометрии звездного неба”.

Список литературы

- [1] Справочник по специальным функциям. Под ред. М.Абрамовица и И.Стиган М.: “Наука”, 830с, 1979
- [2] The Hipparcos and Tycho Catalogues. // ESA-SP1200, vol.1–17, 1997.

- [3] О четырехмиллионном каталоге звезд. Под ред. А.П. Гуляева, В.В. Нестерова. /М.: Изд. Московского университета. 1992, 72 с.
- [4] К.В.Куимов, А.В.Кузьмин, В.В.Нестеров. Новые астрометрические каталоги //CD-ROM, AMTCD_01, ГАИШ МГУ, 1999
- [5] Куимов К.В., Кузьмин А.В., Нестеров В.В. Астрографический каталог в современной астрометрии. //Известия Академии наук, серия физическая. **62**, вып.9, С. 1774-1781. 1998
- [6] Lasker B.M. et al, The Guide Star Catalog Version 1.1 – An all-sky astrometric and photometric catalog to support the operation of the Hubble Space Telescope. The Association of Universities for Research in Astronomy, Inc. ©1989, 1992
- [7] Сантало Л.А. Интегральная геометрия и геометрические вероятности. М: Наука, 1983, 360 с.
- [8] Seares F.H., van Rijn P.J., Joyner M.C., Richmond M.L. Mean distribution of stars according to apparent magnitude and galactic latitude //Ap.J., **62**, 320–374, 1925
- [9] Urban S.E., Corbin T.E., Wycoff G.L., The AC2000: the Astrographic Catalogue on the Hipparcos System. //CD-ROM, U.S. Naval Observatory, September 1997.
- [10] Urban S.E., Corbin T.E., Wycoff G.L. The ACT Reference Catalog //Bull. American Astron. Soc., **191**, N 57.07, 1997
- [11] Høg E., Kuzmin A., Bastian U., Fabricius C., Kuimov K., Lindgren L., Makarov V., Röser S. Tycho Reference Catalogue. //Astron. Astrophys. **335**, P.L65, 1998
- [12] Høg E., Fabricius C., Makarov V.V., Urban S.E., Corbin T.E., Wycoff G.L., Bastian U., Schwekendiek P., Wicenec A. The Tycho-2

Catalogue on CD-ROM, including Guide to Tycho-2, Copenhagen University Observatory, 2000

- [13] С.Чандрасекар. Стохастические проблемы в физике и астрономии. М: Гос.изд. иностр.лит., с., 1947

Accurate positions of variable stars in the western part of the Large Magellanic Cloud bar

Yu.A. Shokin

Аннотация

Приведены координаты 436 звезд в западной части Большого Магелланова облака.

Three catalogues of variable stars in the Large Magellanic Cloud have been published recently [1, 4, 10]. They are based on observations with CCD detectors for gravitational lensing experiments. Analogous work of Hughes [7] was performed on the base of photographic observations in LMC. In these catalogues, besides photometric data, equatorial coordinates of variable stars are given. The authors of the three cited papers used observations carried out with Schmidt telescopes or the Digitized Sky Survey (DSS) to determine the positions of stars. DSS is also based on observations with Schmidt telescopes. Such star positions can contain systematic errors of 0.6–0.7 arcsec [9, 10].

In order to facilitate the procedure of position determinations, we have compiled a catalogue of reference stars in the western part of the LMC bar. This catalogue contains accurate positions of 436 stars in the Tycho frame [6]. It constitutes a reference net with the mean density of 200 stars per square degree in the bar area and can be a reference catalogue for accurate position determinations with CCD detectors. The overwhelming majority of stars (405) in this catalogue are Harvard variables [5]. Other stars are 18 Dublin variables [2] and 7 variables discovered by Kurochkin et al. [8]. Several reference stars in our catalogue are not variables. In the present report, we give only a brief description of the

procedure of catalogue compilation and in the extent necessary for its presentation.

For position determination, we made use of plates taken with two telescopes, the double meniscus astrograph AZT-16 ($F = 207$ cm, $D = 70$ cm, field $5^\circ \times 5^\circ$) at Cerro Roble Astronomical Station and the 1 m reflector ($F = 712$ cm, field diameter 2.5°) at Las Campanas Observatory, both in Chile. Unfortunately it was impossible to measure the plates of the 1 m reflector because of their large size exceeding maximum size of plate which we can measure using our ASCORECORD measuring machine. We have prepared contact film copies of these plates and measured them instead of the plates. The images of Tycho reference stars on the plates of the reflector are too large and cannot be measured accurately. For determination of star positions in the Tycho frame, we used the plates of the astrograph. On the plates of the reflector, only the western half of the LMC bar has been photographed.

Stars in the LMC bar are very crowded, therefore many of them look on the plates as complex images consisting of two or more very close components. The distances between them are less than the image size on the astrograph plates because of the short focal length. If the plates are photographed in different observing conditions, such as differing spectral bands, different exposures, brightness changes due to variability, the complex image looks variously on different plates. After measurements of such plates, we shall get various positions for stars with complex images. The coordinate differences for the double meniscus astrograph can exceed the typical position error by a factor of 3 or even more. As a measure of star crowding influence upon the derived coordinates, we use two values, R_ξ and R_η , of coordinate ranges

$$R_\xi = \xi_{max} - \xi_{min}, \quad R_\eta = \eta_{max} - \eta_{min},$$

where ξ , η are the standard coordinates, derived from measurements of m plates, ξ_{max} and ξ_{min} are maximum and minimum coordinates of a star among these m values (similarly for the η coordinate).

We had 3 measurable astrograph plates (2 in B and 1 in V band). The instrument has no distortion, unlike Schmidt telescopes widely used in deep surveys. The main defect of the astrograph is its short focal length. In order to get the maximal possible accuracy of star positions with our observational material, their determinations were carried out in two stages. At the first one, the so-called “first determination”, three plates of the astrograph were measured. 37% of the catalogue stars had, at this stage, at least one value of R_ξ or R_η in excess of 0.65 arcsec. Often these values exceed 1 arcsec. A typical position error for this instrument is 0.2 arcsec. We believe that there are no significant systematic errors because of star crowding in the positions of stars with R_ξ , R_η of 0.5–0.6 arcsec and less, as these values also include errors of measurements. Therefore we regarded final the positions derived in the first determinations with R_ξ , R_η less than 0.65 arcsec.

The coordinates of stars with R_ξ , R_η above 0.65 arcsec have been redetermined at the second stage. For this purpose, we measured film copies of two plates taken with the 1 m reflector in B and in V bands. At this stage, the variable stars with R_ξ , R_η less than 0.4–0.5 arcsec were used as reference ones. The influence of star crowding in this case was less than at the first stage because of the long focal length of the reflector, accordingly the ranges R_ξ , R_η were usually 0.1–0.2 arcsec. Thus, the two stages of our reduction procedure used the best properties of the two telescopes: the astrometric field of the astrograph and the high resolution of the reflector.

Some variable stars formerly regarded as single have proved visual doubles with a typical distance between their components of about 2 arcsec. If we cannot indicate the variable star in such a pair, we give the coordinates of both components.

It is impossible to form a reference frame consisting of variable stars around a star situated at the edge of the area covered by catalogue. Around each of such stars, a second reference frame containing 7–9 nearest field stars in a small area, usually not more than $10' \times 10'$, was

formed. The coordinates of the secondary reference stars were determined by means of the same procedure as that used in the first determination, *i.e.* three astrograph plates were measured. We have determined the positions of 26 variable stars using such small reference frames.

The catalogue now presented is not uniform in the sense of position accuracy. The most accurate positions are those for stars with images remeasured on the reflector plates. Their accuracy is 0.1 arcsec, but this value shows only that there is a good agreement of two individual positions. In reality, there are systematical errors in these positions, at least because of the magnitude equation.

Using our catalogue, we have estimated the accuracy of the positions in the GCVS Volume V and in the OGLE catalog [10]. The accuracy of the first catalog is 0.4–0.9 arcsec in the LMC bar, but there are systematic errors of 0.3–1.1 arcsec. The comparison of our catalogue with the OGLE catalogue has shown that both are very accurate in the sense of individual star errors. Mean accuracy of star positions in each catalogue is approximately 0.1 arcsec. However, we have found systematic errors in the OGLE catalogue of 0.3–0.6 arcsec, which vary smoothly in the bar area. The authors wrote about a possibility of errors to 0.6 arcsec due to the reduction procedure using the DSS as the reference means. The comparison of the two catalogues was carried out using 196 stars in common.

After the comparison of our catalogue with the OGLE one, we have found some stars with small values (0.3–0.4 arcsec) of R_ξ , R_η but with significant deviations (to 0.3–0.4 arcsec) of our positions from the OGLE ones, after accounting for the systematic differences between these catalogues. Therefore we have redetermined the positions of 34 such stars previously determined using plates of the astrograph. We have remeasured their images on the plates of the 1 m telescope and have achieved a significant decrease of the position differences with the OGLE catalogue.

Thus, the small values of R_ξ , R_η in the first determination do not signify that there is no noticeable error (to 0.3–0.4 arcsec) because of star

crowding in the positions of such stars. Note that the OGLE catalogue was based on observations with a telescope of more than 12 m focal length, therefore the influence of star crowding was significantly less than in the case of the double meniscus astrograph. Having discovered this fact, we have decided to improve our catalogue by redetermination of those star positions which entered it after the first determination. For this end, we had to measure the plates of the 1 m telescope.

However, while working on this project, it would be reasonably to publish the first version of our catalogue, which has been created in the most modern reference frame and is free from systematic errors inherent to those catalogues which are based on observations taken with Schmidt telescopes.

The catalogue presented consist of two parts: a Table 1 of coordinates with identifications and plate information and remarks to individual stars. The catalogue and the remarks are available to the users from <http://astrometric.sai.msu.ru/>

We are grateful to Drs. Yu. Efremov, N. Samus, A. Kuzmin, and V. Sementsov for assistance. Thanks are due to the Isaac Newton Institute for the possibility to measure the reflector plates.

The Catalogue

The breaf description of columns.

Column 1 gives the LMC variable star number according to the GCVS, [3]. An asterisk (*) following the number shows that there is a remark for this star. In the Remarks (Part 2), “GCVS position” means the star position given in the cited catalogue.

Columns 2 and 3 contain equatorial coordinates for equinox J2000 referred to the Tycho frame.

Column 4 indicates the telescope with which the plates measured for coordinate determination were taken. **1 m** is the reflector (D=1 m,

F=712 cm, field diameter 2.5 deg) at Las Campanas Observatory (Chile), **DMA** is the double meniscus astrograph AZT-16 (D=70 cm, F=207 cm, field 5x5 deg) at Cerro Roble Astronomical Station (Chile), **AR** means that the plates of both telescopes were measured, **vs** means that the second reference frame consists of variable stars, **fs** means that the second reference frame consists of field stars.

Column 5 contains the designations of the stars in various publications: **HV** – [5], **D** – [2], **1,4,... 13** – [8].

Column 6 contains the designations of stars in the new catalogues based upon optical microlensing experiments. These catalogues and corresponding designations are: **EROS** – [4], **MACHO** – [1], **OGLE** – [10].

Table 1

1	2	3	4	5	6
LMC No.	RA 2000.0 h m s	DE 2000.0 o ' "	Tele- scope	Name	Designations in new catalogues
577 *	5 00 14.355	-68 54 32.23	1 m fs	HV12517	OGLE LMC_SC15 35181
619	5 00 46.136	-69 04 54.40	1 m fs	HV5534	OGLE LMC_SC15 81394
626	5 00 55.870	-68 26 20.71	DMA	HV2260	
634	5 01 05.149	-68 27 05.78	DMA	HV2263	
635 *	5 01 00.386	-69 03 42.97	DMA	HV12524	
693 *	5 01 54.611	-68 54 14.06	DMA	HV885	OGLE LMC_SC15 148920
700	5 02 01.463	-68 35 02.53	DMA	HV5537	
728	5 02 21.210	-69 13 16.96	1 m fs	HV12537	OGLE LMC_SC15 185375
729	5 02 29.876	-68 19 31.77	DMA	HV12528	
737	5 02 36.553	-68 44 41.32	1 m vs	HV2276	OGLE LMC_SC14 54419
741	5 02 40.811	-68 24 21.26	DMA	HV2274	
758	5 02 51.537	-68 47 05.15	DMA	HV2280	OGLE LMC_SC14 50505
769	5 03 06.210	-68 21 37.24	DMA	HV12535	
770	5 03 04.981	-68 40 24.60	DMA	HV2281	
771	5 03 01.312	-69 09 01.82	DMA	HV5550	
784	5 03 09.097	-69 13 23.90	DMA	HV2288	OGLE LMC_SC14 84259
799	5 03 25.105	-68 46 20.86	DMA	HV2285	OGLE LMC_SC14 117525
800	5 03 27.389	-68 32 22.22	DMA	HV5547	
805	5 03 26.505	-69 08 55.90	DMA	HV2292	OGLE LMC_SC14 88441
819	5 03 39.017	-68 48 11.94	DMA	HV5553	OGLE LMC_SC14 113861
822	5 03 39.021	-68 59 43.51	DMA	HV2293	
824	5 03 39.754	-69 03 04.87	DMA	HV5556	
828	5 03 49.625	-68 19 56.79	DMA	HV5548	
832	5 03 46.169	-68 52 36.18	DMA	HV2291	OGLE LMC_SC14 109640
835	5 03 49.528	-68 56 02.42	1 m vs	HV889	OGLE LMC_SC14 170002
839	5 03 51.296	-68 52 58.85	1 m vs	HV2295	OGLE LMC_SC14 174756
840 *	5 03 49.589	-69 04 13.89	DMA	HV5557	
841	5 03 53.918	-68 41 23.92	1 m vs	HV5555	
847	5 03 57.316	-68 50 24.04	DMA	HV2296	OGLE LMC_SC14 178619
849	5 04 02.383	-68 21 31.43	DMA	HV2286	
860	5 04 00.822	-69 15 36.24	1 m vs	HV5562	
864	5 04 05.217	-69 04 50.82	DMA	HV890	OGLE LMC_SC14 156632
873	5 04 18.129	-68 33 59.83	DMA	HV2297	
874	5 04 14.149	-69 06 11.36	DMA	HV2300	OGLE LMC_SC14 156647
876	5 04 15.498	-69 01 36.04	DMA	HV891	OGLE LMC_SC14 160625
880 *	5 04 21.112	-68 43 42.62	1 m vs	HV892	OGLE LMC_SC14 182466
883 *	5 04 28.494	-68 18 35.47	DMA	HV12540	
909	5 04 44.920	-68 58 31.45	DMA	HV5566	

Table 1 (continued)

1	2	3	4	5	6
917	5 04 55.861	-68 44 56.06	1 m vs	HV5565	
938	5 05 03.058	-69 18 30.36	DMA	HV2306	
941 *	5 05 06.362	-69 26 30.44	DMA	D292	
942	5 05 06.679	-69 00 52.54	DMA	HV5570	
948	5 05 08.939	-69 15 12.20	DMA	HV2307	OGLE LMC_SC12 46999
951	5 05 14.502	-68 46 07.06	DMA	HV5569	OGLE LMC_SC13 35127
955	5 05 16.053	-68 43 24.43	DMA	HV12321	
977 *	5 05 28.282	-69 21 50.89	DMA	D293	OGLE LMC_SC12 37629
982	5 05 26.372	-69 11 35.08	1 m vs	HV2311	OGLE LMC_SC12 51598
986	5 05 27.012	-69 19 44.30	DMA	HV2313	
995	5 05 34.712	-69 20 29.03	DMA	HV2316	OGLE LMC_SC12 42626
999	5 05 42.004	-68 51 05.14	DMA	HV2309	OGLE LMC_SC13 93279
1002	5 05 45.896	-68 38 54.22	1 m vs	HV11977	
1015	5 05 57.418	-68 26 17.72	DMA	HV2305	OGLE LMC_SC13 125152
1016	5 05 52.393	-69 09 29.83	DMA	HV12322	OGLE LMC_SC13 69033
1018 *	5 05 54.230	-68 53 15.34	DMA	HV11978	
1024	5 06 00.600	-68 42 51.67	1 m vs	HV5575	
1026	5 06 02.886	-68 28 18.77	DMA	HV2308	
1030	5 05 59.283	-69 06 29.00	1 m vs	1	MACHO 5 05 59.3 -69 06 30
1032	5 06 00.886	-69 06 17.08	DMA	HV893	OGLE LMC_SC13 74156
1037 *	5 06 06.212	-69 36 43.21	1 m fs	D78	
1037 *	5 06 06.638	-69 36 42.04	1 m fs	D78	
1040	5 06 16.905	-68 40 33.62	DMA	HV895	OGLE LMC_SC13 173745
1054 *	5 06 27.907	-68 52 18.31	DMA	HV2318	
1055	5 06 28.690	-68 56 40.77	DMA	HV12323	MACHO 5 06 28.5 -68 56 41
1058 *	5 06 25.872	-69 26 46.95	AR vs	HV5597	
1061	5 06 39.884	-68 25 12.67	DMA	HV896	OGLE LMC_SC13 194103
1064	5 06 34.108	-69 30 03.44	DMA	HV5600	
1065	5 06 39.115	-68 57 46.91	1 m vs	HV5589	OGLE LMC_SC13 151864
1073 *	5 06 51.141	-68 17 46.01	DMA	HV5581	
1077 *	5 06 50.322	-68 49 36.98	DMA	HV2323	
1080	5 06 52.968	-68 39 35.47	DMA	HV2319	OGLE LMC_SC13 178831
1081	5 06 52.873	-68 43 25.00	1 m vs	HV2321	OGLE LMC_SC13 173734
1084	5 06 55.281	-68 38 14.06	1 m vs	HV2320	OGLE LMC_SC13 247806
1085	5 06 58.362	-68 20 58.63	DMA	HV5582	
1087	5 06 58.320	-68 36 41.10	DMA	HV898	OGLE LMC_SC13 247787
1088	5 06 56.164	-69 03 15.37	DMA	HV2326	OGLE LMC_SC13 214116
1097	5 07 07.824	-68 53 19.58	DMA	HV899	OGLE LMC_SC13 228645
1106 *	5 07 16.011	-68 53 00.38	1 m vs	HV5602	
1108	5 07 21.181	-68 20 48.07	DMA	HV5592	

Table 1 (continued)

1	2	3	4	5	6
1109	5 07 21.695	-68 20 18.25	DMA	HV2324	OGLE LMC_SC13 267454
1114	5 07 17.960	-69 09 54.20	1 m vs	HV2329	
1115	5 07 23.304	-68 38 30.74	1 m vs	HV2327	OGLE LMC_SC13 247801
1119	5 07 25.764	-68 28 36.68	DMA	HV2325	OGLE LMC_SC13 261046
1120	5 07 26.260	-68 29 13.66	DMA	HV5595	OGLE LMC_SC13 261045
1123	5 07 26.091	-68 53 19.79	DMA	HV2328	OGLE LMC_SC13 228660
1125	5 07 26.682	-68 51 42.03	1 m vs	HV11979	
1129	5 07 32.113	-68 35 36.34	1 m vs	HV5599	
1130	5 07 30.684	-68 47 34.64	DMA	4	
1132	5 07 38.969	-68 20 05.98	DMA	HV5598	
1135	5 07 36.333	-68 57 20.67	DMA	HV5608	
1145 *	5 07 48.909	-68 27 34.14	1 m vs	HV12324	MACHO 5 07 48.9 -68 27 35
1146	5 07 42.171	-69 14 47.88	DMA	HV901	OGLE LMC_SC11 32393
1147	5 07 45.163	-68 55 59.56	DMA	HV11980	
1155	5 07 50.069	-69 02 44.70	1 m vs	6	OGLE LMC_SC11 54739
1165 *	5 08 03.324	-68 37 32.67	DMA	HV5609	
1178	5 08 18.251	-68 46 47.11	DMA	HV904	OGLE LMC_SC11 162232
1182	5 08 15.640	-69 29 04.22	1 m fs	HV5619	MACHO 5 08 15.5 -69 29 06
1184	5 08 22.219	-68 56 52.97	DMA	HV5614	
1185	5 08 16.353	-69 43 03.22	1 m fs	D84	
1216	5 08 50.081	-68 39 42.56	DMA	HV2333	
1219	5 08 49.519	-68 59 59.03	DMA	HV2339	OGLE LMC_SC11 227948
1223	5 08 48.903	-69 39 14.14	1 m vs	HV5624	
1224	5 08 56.063	-68 55 33.01	1 m vs	HV11982	
1225 *	5 08 57.637	-68 50 58.99	1 m vs	8	OGLE LMC_SC11 244566
1226	5 08 54.300	-69 14 33.64	1 m vs	HV11983	OGLE LMC_SC11 206018
1232	5 09 14.041	-68 24 14.46	DMA	HV5616	
1236	5 09 18.347	-68 17 58.54	DMA	HV2335	
1237	5 09 15.956	-68 44 29.43	1 m vs	HV905	OGLE LMC_SC11 257240
1239	5 09 16.015	-68 58 40.58	DMA	HV2342	
1240	5 09 11.309	-69 29 49.39	DMA	HV2346	
1243	5 09 15.136	-69 09 02.59	DMA	HV11985	OGLE LMC_SC11 217136
1255	5 09 26.958	-68 54 12.74	1 m vs	HV906	OGLE LMC_SC11 331546
1257 *	5 09 28.271	-68 47 51.50	DMA vs	HV11984	
1258	5 09 18.912	-69 50 14.25	DMA	HV2350	
1263	5 09 29.194	-68 55 02.47	DMA	HV5622	MACHO 5 09 29.1 -68 55 03
1282	5 09 38.268	-69 07 25.98	DMA	HV11988	
1283	5 09 36.056	-69 24 22.50	1 m vs	HV5632	
1284	5 09 41.985	-68 51 24.75	DMA	HV5626	
1285	5 09 42.187	-68 52 58.32	DMA	HV11986	

Table 1 (continued)

1	2	3	4	5	6
1287	5 09 44.457	-68 46 36.39	DMA	HV5625	
1288	5 09 43.081	-69 00 30.07	1 m vs	HV5629	
1289	5 09 40.117	-69 20 27.77	DMA	HV2348	
1293	5 09 50.352	-68 18 00.39	DMA	HV2340	
1297 *	5 09 50.174	-68 31 17.86	1 m vs	D223	
1300	5 09 51.336	-68 48 44.95	DMA	HV5628	
1303 *	5 09 49.170	-69 18 29.79	DMA vs	D302	
1303 *	5 09 49.369	-69 18 31.44	1 m vs	D302	
1304	5 09 52.035	-69 06 57.50	DMA	HV11989	
1305	5 09 57.566	-68 39 29.82	1 m vs	HV910	
1307	5 09 56.356	-68 59 40.65	DMA	HV908	OGLE LMC_SC11 320035
1310 *	5 10 02.965	-69 01 15.90	DMA	D301	OGLE LMC_SC10 44984
1311	5 09 59.316	-69 08 40.40	1 m vs	HV2349	OGLE LMC_SC10 35605
1320	5 10 05.652	-69 13 14.38	DMA	HV5633	
1321	5 10 09.951	-68 45 35.92	DMA	HV5630	
1351	5 10 36.118	-69 08 17.88	1 m vs	HV911	OGLE LMC_SC10 35590
1352 *	5 10 28.475	-69 53 16.35	DMA	D92	
1356	5 10 43.336	-68 46 50.46	1 m vs	11	
1366	5 10 56.309	-69 01 55.73	DMA	HV2356	OGLE LMC_SC10 119173
1369	5 10 59.466	-68 51 39.51	DMA	HV5642	
1377	5 11 04.188	-69 00 02.92	1 m vs	HV11990	
1385 *	5 11 11.339	-69 12 29.90	1 m vs	HV2359	OGLE LMC_SC10 105186
1386	5 11 10.778	-69 18 37.26	1 m vs	HV11991	OGLE LMC_SC10 95782
1389	5 11 19.878	-68 33 07.21	DMA	D235	
1398	5 11 13.989	-69 59 31.63	DMA	HV2366	
1404	5 11 31.385	-68 35 29.05	DMA	HV2358	
1427 *	5 11 50.188	-68 30 58.99	1 m fs	HV2361	
1428	5 11 47.696	-68 52 53.72	DMA	HV5650	
1429	5 11 47.555	-68 53 34.44	1 m vs	HV11993	
1430	5 11 48.799	-68 46 22.61	1 m vs	HV11992	OGLE LMC_SC10 208170
1440	5 11 53.276	-69 06 48.45	1 m vs	HV913	OGLE LMC_SC10 181906
1445 *	5 11 59.005	-69 03 26.18	1 m vs	HV5651	OGLE LMC_SC10 259946
1448	5 12 01.944	-68 50 38.90	1 m vs	HV2364	OGLE LMC_SC10 278750
1458 *	5 12 07.896	-68 52 02.31	1 m vs	HV11994	OGLE LMC_SC10 274214
1462 *	5 12 15.107	-68 55 52.03	1 m vs	HV11995	
1466	5 12 18.787	-68 52 44.76	DMA	HV2367	OGLE LMC_SC10 274140
1475	5 12 20.635	-69 22 44.89	1 m vs	HV5658	OGLE LMC_SC10 235307
1478	5 12 26.157	-69 13 56.86	1 m vs	HV2371	OGLE LMC_SC10 245236
1485	5 12 28.885	-69 31 07.10	1 m vs	HV5661	
1486	5 12 32.355	-69 20 02.23	DMA	HV5659	

Table 1 (continued)

1	2	3	4	5	6
1487	5 12 34.747	-69 12 33.88	DMA	HV11996	OGLE LMC_SC10 250322
1489 *	5 12 42.167	-68 34 59.34	1 m fs	D244	
1493 *	5 12 48.170	-68 29 06.39	1 m fs	HV2368	
1494	5 12 40.555	-69 36 04.16	DMA	HV5665	
1495	5 12 47.041	-69 06 08.77	1 m vs	HV914	OGLE LMC_SC9 58697
1499 *	5 12 39.279	-69 54 56.40	1 m vs	D99	
1500	5 12 49.781	-69 00 50.06	1 m vs	HV2372	OGLE LMC_SC9 65304
1508	5 12 56.253	-68 57 52.13	DMA	HV5663	OGLE LMC_SC9 71784
1510	5 12 54.796	-69 18 52.37	DMA	HV5666	
1511	5 12 57.652	-69 02 03.50	1 m vs	HV11997	OGLE LMC_SC9 65386
1518	5 13 04.071	-68 46 17.58	DMA	HV2373	OGLE LMC_SC9 90526
1527	5 13 07.855	-69 03 09.25	1 m vs	HV11998	OGLE LMC_SC9 65307
1552	5 13 14.764	-69 14 32.51	1 m vs	HV11999	
1566	5 13 18.668	-69 57 57.08	DMA	HV5673	
1572	5 13 33.061	-68 46 28.90	1 m vs	HV5669	MACHO 5 13 33.1 -68 46 24
1573	5 13 33.694	-68 57 07.22	1 m vs	12	OGLE LMC_SC9 166047
1578	5 13 32.867	-69 21 42.35	DMA	HV2377	
1580	5 13 26.543	-70 04 55.73	1 m vs	HV12568	
1595	5 13 49.183	-69 05 42.43	1 m vs	HV5671	OGLE LMC_SC9 250306
1598	5 13 50.450	-69 05 01.07	DMA	HV2378	OGLE LMC_SC9 250313
1605	5 13 53.009	-69 21 37.28	DMA	HV5676	OGLE LMC_SC9 216934
1606	5 13 56.416	-69 00 55.56	1 m vs	HV12000	OGLE LMC_SC9 257206
1607	5 13 51.726	-69 34 13.16	DMA	HV2385	
1609	5 13 52.790	-69 34 48.78	1 m vs	D102	OGLE LMC_SC9 198335
1611	5 13 49.302	-69 57 52.46	DMA	HV2390	
1614	5 13 50.781	-69 51 47.45	1 m vs	HV5682	
1615	5 13 56.814	-69 15 56.68	1 m vs	HV5675	OGLE LMC_SC9 230584
1618	5 14 00.759	-68 57 56.81	DMA	13	
1629	5 14 04.827	-69 04 42.47	DMA	HV12002	
1631	5 14 06.300	-69 04 25.98	1 m vs	HV2383	OGLE LMC_SC9 250286
1632	5 14 07.537	-69 01 13.03	DMA	HV12001	OGLE LMC_SC9 257262
1634	5 14 11.031	-68 55 34.56	DMA	HV5674	OGLE LMC_SC9 269513
1639	5 14 18.113	-69 12 34.83	DMA	HV915	
1641	5 14 08.971	-70 11 20.96	DMA	HV5693	
1647	5 14 19.440	-69 29 24.32	DMA	HV2392	OGLE LMC_SC9 204218
1648	5 14 12.774	-70 13 38.53	DMA	HV5694	
1653	5 14 25.585	-69 25 02.16	1 m vs	HV2393	OGLE LMC_SC9 210651
1658 *	5 14 29.602	-68 54 35.14	1 m vs	HV5680	OGLE LMC_SC9 379149
1661	5 14 33.261	-69 02 29.92	DMA	HV5681	
1663 *	5 14 29.072	-69 42 23.78	DMA	D307	

Table 1 (continued)

1	2	3	4	5	6
1670	5 14 40.847	-68 46 25.04	DMA	HV2389	
1671	5 14 40.890	-68 47 44.55	DMA	HV5683	
1682	5 14 38.998	-69 30 27.92	1 m vs	HV2396	OGLE LMC_SC9 304869
1684	5 14 43.443	-69 04 25.80	1 m vs	HV5686	OGLE LMC_SC9 357563
1687 *	5 14 42.612	-69 30 56.62	1 m vs	HV2397	OGLE LMC_SC9 304820
1688	5 14 48.936	-68 56 01.66	1 m vs	HV5685	OGLE LMC_SC9 379131
1689 *	5 14 39.899	-69 58 40.20	1 m vs	HV2399	
1689 *	5 14 40.239	-69 58 39.88	1 m vs	HV2399	
1690	5 14 47.195	-69 14 42.09	1 m vs	HV5691	
1693	5 14 52.195	-68 49 03.63	DMA	HV2394	OGLE LMC_SC9 391734
1694	5 14 49.532	-69 12 40.91	1 m vs	HV5692	OGLE LMC_SC9 342099
1697	5 14 49.991	-69 20 30.28	1 m vs	HV5695	
1701	5 14 54.105	-69 03 15.40	DMA	HV5689	OGLE LMC_SC9 365050
1706	5 14 53.437	-69 28 44.41	1 m vs	HV5696	
1709 *	5 14 57.822	-69 35 28.62	1 m vs	HV5698	
1715	5 15 06.805	-69 01 39.26	1 m vs	HV2398	OGLE LMC_SC8 70457
1722	5 15 10.437	-69 22 58.15	DMA	HV2400	OGLE LMC_SC8 33629
1726	5 15 04.604	-70 07 09.92	1 m vs	HV919	
1727	5 15 10.851	-69 32 23.06	DMA	HV2402	OGLE LMC_SC8 21319
1729	5 15 06.873	-70 01 49.69	DMA	HV5704	
1733	5 15 16.882	-69 08 09.01	1 m vs	HV5697	OGLE LMC_SC8 64736
1737	5 15 18.756	-69 13 31.83	DMA	HV917	OGLE LMC_SC8 52582
1738	5 15 21.439	-69 05 00.98	1 m vs	HV918	OGLE LMC_SC8 70430
1742	5 15 20.452	-69 24 42.68	1 m vs	HV12003	OGLE LMC_SC8 33708
1743 *	5 15 26.135	-68 43 02.31	DMA	D258	
1746	5 15 24.697	-69 06 20.29	1 m vs	HV5699	OGLE LMC_SC8 64724
1756	5 15 28.249	-69 13 57.83	1 m vs	HV12004	OGLE LMC_SC8 52604
1762	5 15 24.222	-70 10 51.98	DMA	HV12573	
1769	5 15 38.402	-69 15 19.80	1 m vs	HV920	OGLE LMC_SC8 145094
1773	5 15 40.466	-69 04 27.90	DMA	HV921	OGLE LMC_SC8 162069
1781	5 15 45.464	-69 22 02.86	1 m vs	HV2407	OGLE LMC_SC8 132537
1782	5 15 51.648	-68 40 43.94	1 m fs	HV5701	
1786	5 15 53.806	-69 02 23.01	1 m vs	HV5706	OGLE LMC_SC8 162104
1791	5 15 47.976	-69 55 03.42	DMA	HV2415	
1794	5 15 58.282	-68 58 12.96	DMA	HV2406	OGLE LMC_SC8 167854
1799	5 15 57.026	-69 21 46.53	1 m vs	HV2411	OGLE LMC_SC8 132583
1800	5 15 59.953	-69 04 29.57	1 m vs	HV2408	OGLE LMC_SC8 162087
1801	5 16 00.017	-69 16 01.81	DMA	HV5705	
1805	5 16 04.554	-68 59 50.34	1 m vs	HV2409	OGLE LMC_SC8 167797
1806	5 15 58.020	-69 42 43.53	DMA	HV2416	OGLE LMC_SC8 95310

Table 1 (continued)

1	2	3	4	5	6
1808	5 16 00.202	-69 32 17.61	DMA	HV2414	OGLE LMC_SC8 111959
1812	5 16 08.031	-69 01 51.78	1 m vs	HV2410	OGLE LMC_SC8 162176
1816	5 16 06.442	-69 28 25.16	1 m vs	HV922	OGLE LMC_SC8 118587
1817	5 16 04.971	-69 38 40.84	DMA	HV5710	
1821	5 16 06.502	-69 38 36.96	1 m vs	HV5711	
1824 *	5 16 07.391	-69 41 02.26	DMA	D108	
1826	5 16 09.843	-69 32 39.68	DMA	HV923	OGLE LMC_SC8 111955
1827	5 16 04.011	-70 07 59.73	DMA	HV2419	
1828	5 16 14.719	-69 02 32.76	DMA	HV12995	OGLE LMC_SC8 162101
1833	5 16 16.816	-69 05 04.78	1 m vs	HV5707	
1839	5 16 16.080	-69 43 37.02	1 m vs	HV925	
1840	5 16 10.968	-70 17 36.12	DMA	HV926	
1841	5 16 25.338	-68 49 51.03	1 m vs	HV2413	
1844	5 16 26.520	-68 53 55.78	DMA	HV5708	
1847	5 16 16.708	-70 10 07.05	DMA	HV2421	
1877	5 16 47.424	-69 44 15.16	DMA	HV2423	
1881	5 16 52.680	-69 22 03.94	1 m vs	HV2422	OGLE LMC_SC8 224912
1883 *	5 16 54.919	-69 19 50.44	1 m vs	HV927	OGLE LMC_SC8 224901
1884	5 17 01.255	-68 37 14.57	DMA	HV2418	
1892 *	5 16 58.551	-69 51 17.33	1 m vs	D113	
1894	5 17 02.070	-69 38 51.82	1 m vs	HV5716	OGLE LMC_SC8 285174
1897	5 17 09.642	-69 13 14.05	1 m vs	HV12005	OGLE LMC_SC8 331791
1898	5 17 09.045	-69 32 21.11	1 m vs	HV5717	
1900	5 17 06.943	-70 06 24.92	DMA	HV2431	
1901	5 17 14.547	-69 22 50.41	DMA	HV12007	
1907	5 17 18.116	-69 32 59.60	DMA	HV12006	OGLE LMC_SC8 298699
1909	5 17 16.164	-69 50 34.86	1 m vs	HV2429	
1910	5 17 24.725	-69 20 57.69	DMA	HV2426	OGLE LMC_SC8 318671
1914	5 17 30.764	-69 12 02.41	1 m vs	HV2427	OGLE LMC_SC8 337497
1917	5 17 31.798	-69 25 11.44	1 m vs	HV2430	OGLE LMC_SC7 55965
1918 *	5 17 35.308	-69 09 17.50	1 m vs	HV5718	OGLE LMC_SC7 93939
1922	5 17 38.203	-69 03 29.21	1 m vs	HV5720	
1926 *	5 17 35.704	-69 48 13.35	1 m vs	D115	OGLE LMC_SC7 6487
1927	5 17 44.366	-69 07 11.04	DMA	HV5723	
1928	5 17 38.407	-69 45 19.52	DMA	HV5729	OGLE LMC_SC7 6477
1932 *	5 17 46.357	-69 47 22.26	DMA	D116	
1933	5 17 52.239	-69 02 10.93	DMA	HV5724	
1934	5 17 39.840	-70 21 27.50	DMA	HV12577	
1936	5 17 51.124	-69 29 47.40	DMA	HV2436	EROS 1046
1938	5 17 55.575	-69 07 41.18	DMA	HV5725	

Table 1 (continued)

1	2	3	4	5	6
1943	5 17 53.050	-69 40 35.10	DMA	HV12986	
1947 *	5 17 55.304	-69 45 46.31	1 m vs	HV2442	OGLE LMC_SC7 6475
1948	5 17 56.553	-69 38 53.44	DMA	HV2439	OGLE LMC_SC7 21841
1949	5 17 56.294	-69 40 25.61	DMA	HV2440	
1951	5 17 56.358	-69 47 21.14	1 m vs	HV2443	OGLE LMC_SC7 6499
1952	5 17 59.840	-69 30 07.84	DMA	HV2437	
1956	5 18 03.780	-69 25 35.92	DMA	HV2438	OGLE LMC_SC7 55964
1958 *	5 18 00.888	-69 44 10.86	1 m vs	HV5733	OGLE LMC_SC7 14079
1962 *	5 18 41.904	-69 38 22.99	1 m vs	HV12009	OGLE LMC_SC7 142153
1966	5 18 06.569	-69 39 00.54	1 m vs	HV12008	OGLE LMC_SC7 21940
1971	5 18 08.958	-69 50 43.67	DMA	HV5734	
1973	5 18 19.396	-68 52 34.99	DMA	HV5731	
1975	5 18 12.337	-69 43 33.82	1 m vs	HV5735	
1979	5 18 21.208	-69 03 05.23	DMA	HV5732	
1989	5 18 28.566	-69 40 03.31	1 m vs	HV5737	
1993	5 18 29.617	-69 48 40.97	DMA	HV5738	OGLE LMC_SC7 126780
2007	5 18 45.450	-69 03 21.79	DMA	HV2444	
2009	5 18 45.687	-69 06 32.58	DMA	HV5736	OGLE LMC_SC7 214432
2011	5 18 40.660	-69 38 58.53	DMA	HV5742	
2020	5 18 49.136	-69 21 29.36	1 m vs	HV2445	OGLE LMC_SC7 303837
2021	5 18 50.274	-69 16 36.12	DMA	HV5741	OGLE LMC_SC7 318572
2022	5 18 49.285	-69 35 22.80	1 m vs	HV5743	
2024	5 18 51.091	-69 39 12.82	DMA	HV12010	OGLE LMC_SC7 262813
2026	5 18 56.435	-69 34 02.78	1 m vs	HV5752	OGLE LMC_SC7 278113
2028	5 18 52.991	-70 04 18.19	1 m vs	HV2451	MACHO 5 18 53.0 -70 04 18
2033	5 19 03.701	-69 14 11.30	DMA	HV5744	
2035	5 19 02.616	-69 40 10.06	1 m vs	HV12011	OGLE LMC_SC7 262801
2044	5 19 15.830	-69 14 45.73	1 m vs	HV2448	OGLE LMC_SC7 318528
2045	5 19 11.812	-69 42 25.02	DMA	HV12012	EROS 1044
2047	5 19 14.850	-69 36 18.00	1 m vs	HV932	OGLE LMC_SC7 270379
2049	5 19 17.222	-69 30 25.25	1 m vs	HV5749	OGLE LMC_SC7 286535
2056	5 19 23.290	-69 09 54.23	1 m vs	HV5747	OGLE LMC_SC7 331967
2064	5 19 30.490	-68 41 09.55	DMA	HV2447	
2065	5 19 21.864	-69 39 04.94	1-M vs	HV12013	
2066	5 19 25.403	-69 18 26.70	DMA	HV5750	OGLE LMC_SC7 311535
2067	5 19 30.399	-68 57 36.78	1 m vs	HV2452	OGLE LMC_SC7 472701
2068	5 19 31.098	-68 53 41.21	DMA	HV5746	
2070	5 19 27.794	-69 30 30.44	1 m vs	HV2453	OGLE LMC_SC7 286532
2077	5 19 26.441	-69 51 50.87	DMA	HV5756	OGLE LMC_SC7 239698

Table 1 (continued)

1	2	3	4	5	6
2080	* 5 19 42.504	-68 44 57.91	1 m fs	HV5751	
2080	* 5 19 42.680	-68 44 54.72	1 m fs	HV5751	
2083	5 19 38.052	-69 37 44.62	1 m vs	HV2455	OGLE LMC_SC7 388032
2087	* 5 19 41.670	-69 28 37.36	1 m vs	HV12014	
2087	* 5 19 41.872	-69 28 35.86	1 m vs	HV12014	
2088	5 19 43.800	-69 22 53.88	1 m vs	HV5757	OGLE LMC_SC7 424850
2095	5 19 56.360	-68 35 50.28	DMA	HV5755	
2099	5 19 51.037	-69 28 23.93	DMA	HV12015	
2100	5 19 55.184	-69 09 44.10	DMA	HV5759	
2102	5 19 53.295	-69 27 33.60	DMA	HV5760	
2104	5 19 46.961	-70 15 30.52	DMA	HV2462	
2110	5 19 59.956	-69 10 25.51	DMA	HV933	OGLE LMC_SC7 447509
2111	5 19 58.749	-69 19 15.39	1 m vs	HV2456	OGLE LMC_SC7 432869
2115	5 20 04.545	-69 16 50.87	DMA	HV2458	OGLE LMC_SC7 440072
2122	5 20 03.977	-69 36 38.91	1 m vs	HV936	
2124	5 20 12.212	-69 02 01.82	1 m vs	HV2459	
2127	5 20 06.998	-70 04 09.34	DMA	HV2464	
2131	5 20 21.929	-68 43 02.51	DMA	HV2460	
2135	5 20 16.193	-69 25 05.51	DMA	HV5763	
2139	5 20 23.064	-69 02 17.54	1 m vs	HV5761	
2141	5 20 14.035	-70 06 26.51	DMA	HV5765	
2143	5 20 14.569	-70 06 59.71	DMA	HV5766	
2150	5 20 28.625	-69 01 31.85	DMA	HV2463	
2156	5 20 22.964	-70 02 33.07	1 m vs	HV937	OGLE LMC_SC6 11
2169	5 20 37.901	-69 08 52.34	1 m vs	HV5764	
2171	5 20 37.408	-69 30 56.71	1 m vs	HV2466	OGLE LMC_SC6 66530
2173	5 20 41.623	-69 07 34.85	1 m vs	HV2465	
2175	5 20 42.755	-69 08 50.96	1 m vs	HV5767	
2179	5 20 45.446	-69 12 56.50	1 m vs	HV5769	
2180	5 20 44.386	-69 22 24.44	DMA	HV5770	
2181	5 20 42.468	-69 42 57.21	DMA	HV12016	
2183	5 20 42.406	-70 09 50.23	1 m vs	HV5771	
2187	5 20 52.853	-69 37 40.39	1 m vs	HV2467	
2190	5 20 46.822	-70 31 06.96	DMA	HV12580	
2193	5 20 56.005	-69 48 20.61	DMA	HV939	OGLE LMC_SC6 149023
2194	5 20 56.399	-69 49 24.38	1 m vs	HV5772	
2195	5 20 54.145	-70 12 22.43	1 m vs	HV5773	
2200	5 21 12.488	-69 03 07.49	DMA	HV938	
2204	* 5 21 18.887	-69 11 47.54	DMA	HV5774	OGLE LMC_SC6 350603
2208	5 21 15.010	-69 49 33.85	1 m vs	HV2468	OGLE LMC_SC6 149017

Table 1 (continued)

1	2	3	4	5	6
2215	5 21 27.968	-69 30 16.31	DMA	HV12017	
2216	5 21 22.466	-70 10 31.84	DMA	HV2469	
2219 *	5 21 26.797	-70 08 38.71	DMA	HV5778	
2232	5 21 47.279	-69 20 41.05	1 m vs	HV5777	OGLE LMC_SC6 330218
2239	5 21 54.587	-69 23 05.22	DMA	HV2471	
2241	5 21 56.089	-69 19 06.60	DMA	HV5780	OGLE LMC_SC6 337291
2242	5 21 48.000	-70 09 57.11	1 m vs	HV942	
2243	5 21 49.146	-70 04 34.44	DMA	HV5779	OGLE LMC_SC6 242669
2244	5 22 01.181	-68 51 32.23	DMA	HV2470	
2247	5 21 48.265	-70 30 25.96	DMA	HV2473	
2249	5 22 01.967	-69 22 46.43	1 m vs	HV941	OGLE LMC_SC6 447868
2251	5 22 06.629	-68 56 31.02	DMA	HV940	
2254 *	5 21 51.090	-70 41 35.54	1 m fs	HV5786	
2269	5 22 22.765	-68 57 29.32	1 m fs	HV943	
2270	5 22 23.040	-68 56 34.28	1 m fs	HV5782	
2271	5 22 12.271	-70 04 31.35	1 m vs	HV2474	OGLE LMC_SC6 356428
2273	5 22 19.378	-69 37 54.76	1 m vs	HV944	OGLE LMC_SC6 404591
2275	5 22 20.721	-69 34 02.03	1 m vs	HV12018	
2277 *	5 22 28.455	-69 00 04.71	1 m fs	HV5784	
2277 *	5 22 28.462	-69 00 02.69	1 m fs	HV5784	
2282	5 22 25.581	-69 49 29.33	1 m vs	HV12019	OGLE LMC_SC6 384159
2283 *	5 22 27.356	-69 53 24.20	DMA	HV12020	OGLE LMC_SC5 26913
2284	5 22 31.053	-69 34 05.46	DMA	HV2475	
2287	5 22 29.409	-70 10 22.50	DMA	HV12021	
2291 *	5 22 34.863	-69 55 43.39	1 m vs	HV945	OGLE LMC_SC5 19786
2295 *	5 22 39.166	-69 58 09.54	1 m vs	HV2476	OGLE LMC_SC5 19806
2297	5 22 43.682	-69 37 20.59	1 m vs	HV946	
2300	5 22 40.187	-70 00 39.60	1 m vs	HV2477	OGLE LMC_SC5 12934
2301	5 22 41.073	-69 58 43.24	1 m vs	HV12022	OGLE LMC_SC5 13053
2303	5 22 44.170	-69 44 41.64	DMA	HV5790	
2307	5 22 48.274	-69 42 45.49	1 m vs	HV2478	OGLE LMC_SC5 49713
2311	5 22 44.464	-70 09 39.39	1 m vs	HV2481	
2313	5 22 43.195	-70 23 04.85	DMA	HV2484	
2317	5 22 50.582	-69 53 20.14	DMA	HV12023	OGLE LMC_SC5 26915
2318	5 22 56.284	-69 19 58.69	1 m vs	HV5791	OGLE LMC_SC5 99563
2319	5 22 51.939	-69 47 30.87	DMA	HV2480	OGLE LMC_SC5 41285
2326	5 22 58.344	-69 26 20.90	1 m vs	HV2479	
2330	5 22 52.881	-70 07 45.91	1 m vs	HV5792	OGLE LMC_SC5 94
2332	5 23 01.448	-69 27 07.72	1 m vs	HV2483	
2336	5 23 04.678	-69 16 57.47	DMA	HV2482	OGLE LMC_SC5 106184

Table 1 (continued)

1	2	3	4	5	6
2342	5 23 07.679	-69 33 49.91	1 m vs	HV12024	OGLE LMC_SC5 193998
2345	5 22 59.478	-70 33 24.35	DMA	HV2487	
2353	5 23 04.472	-70 31 13.70	DMA	HV12586	
2356	5 23 15.830	-69 53 58.19	DMA	HV12025	OGLE LMC_SC5 145323
2358	5 23 14.081	-70 06 24.35	DMA	HV12026	OGLE LMC_SC5 118861
2367	5 23 19.324	-69 53 35.29	1 m vs	HV947	OGLE LMC_SC5 145264
2370	5 23 29.053	-69 18 37.62	DMA	HV2488	OGLE LMC_SC5 220851
2371	5 23 27.188	-69 42 42.17	1 m vs	HV5797	
2384	5 23 37.906	-69 57 53.49	1 m vs	HV2489	OGLE LMC_SC5 138037
2385	5 23 35.025	-70 16 06.11	DMA	HV2490	
2387	5 23 39.188	-70 00 14.28	1 m vs	HV948	OGLE LMC_SC5 131209
2390 *	5 23 51.289	-69 13 55.73	DMA	HV5800	OGLE LMC_SC5 338247
2391	5 23 51.044	-69 07 30.77	DMA	HV5799	
2394	5 23 50.876	-69 20 54.33	DMA	HV12991	
2396	5 23 51.855	-69 20 20.34	DMA	HV12992	
2397	5 23 49.283	-69 39 30.20	DMA	HV12029	
2401	5 23 53.547	-69 20 50.50	DMA	HV5803	OGLE LMC_SC5 327787
2405	5 23 45.915	-70 25 01.38	DMA	HV5808	
2409	5 23 52.208	-70 03 30.15	1 m fs	HV5809	OGLE LMC_SC5 238336
2410	5 23 47.541	-70 30 13.34	DMA	HV2494	
2414	5 23 54.145	-70 10 05.82	DMA	HV2493	
2417 *	5 24 06.299	-69 25 11.54	1 m fs	HV2492	
2418 *	5 23 56.006	-70 29 32.09	DMA	HV12592	
2419 *	5 24 07.042	-69 23 36.87	RA fs	HV5810	
2422	5 24 04.144	-69 58 19.85	1 m vs	HV12030	OGLE LMC_SC5 251617
2424	5 24 06.456	-69 48 22.21	1 m vs	HV12031	OGLE LMC_SC5 267140
2436	5 24 17.141	-70 12 07.56	1 m fs	HV5817	
2437	5 24 21.333	-69 48 30.28	1 m vs	HV950	OGLE LMC_SC5 267138
2443	5 24 30.532	-69 11 20.91	DMA	HV5816	
2444	5 24 25.501	-69 46 19.03	1 m vs	HV12032	OGLE LMC_SC5 275412
2450	5 24 25.086	-70 10 23.66	1 m fs	HV2500	
2455	5 24 33.291	-69 36 40.27	DMA	HV2497	OGLE LMC_SC5 416554
2456	5 24 29.389	-70 09 58.64	DMA	HV2498	
2459	5 24 34.870	-69 44 19.72	1 m fs	HV2499	OGLE LMC_SC5 399066
2461	5 24 33.961	-69 54 48.66	DMA	HV2502	OGLE LMC_SC5 372083
2463	5 24 33.683	-69 56 21.94	1 m vs	HV954	OGLE LMC_SC5 364380
2470	5 24 41.407	-69 43 31.75	DMA	HV2503	OGLE LMC_SC5 399079
2475	5 24 45.253	-69 42 00.64	1 m fs	HV2506	OGLE LMC_SC5 399097
2491 *	5 24 55.953	-69 43 52.72	1 m fs	HV2508	OGLE LMC_SC5 399077

Remarks

The GCVS position is regarded as erroneous if it differs from the position in our catalogue by more than 3 arcsec at least in one coordinate.

- V577 The star has a very close component excluding accurate position determination. The star position was derived from one plate of the 1 m reflector.
- V635 The star images were measured on two plates of the astrograph. The coordinates are not very accurate.
- V693 The GCVS position is erroneous.
- V840 SY Dor n
- V880 In V band, a complex image consisting at least of three very close images.
- V883 The star has been measured on two plates of the astrograph. The coordinates are not very accurate.
- V941 The GCVS position is erroneous.
- V977 The GCVS position is erroneous.
- V1018 The GCVS position is erroneous.
- V1037 There are two components separated by 2.5 arcsec. We cannot indicate the varying component.
- V1054 The GCVS position is erroneous.
- V1058 The star images were measured on two plates of the astrograph and on one plate of the reflector.
- V1073 Star images were measured on the astrograph plates. The coordinates are not very accurate.
- V1077 SZ Dor
- V1106 TT Dor
- V1145 The star position has been derived from one plate of the reflector.

- V1165 The GCVS position is erroneous.
- V1225 Has a complex image in V band.
- V1257 The position of the star has been derived from two astrograph plates in the reference frame of variable stars.
- V1297 The GCVS position is erroneous.
- V1303 There are two close components separated by 2 arcsec. We confirm the variability of both components. This star was regarded formerly as a single object.
- V1310 The GCVS position is erroneous.
- V1352 The GCVS position is erroneous.
- V1385 The star was marked in disagreement with the remark for it in the atlas of Hodge and Wright, 1967. Instead of V1385 (HV2359), component to S and E was marked.
- V1427 The coordinates have been derived from one plate of the 1 m reflector.
- V1445 TU Dor
- V1458 The GCVS position is erroneous.
- V1462 The GCVS position is erroneous.
- V1489 The GCVS position is erroneous.
- V1493 The position has been derived from one plate of the reflector.
- V1499 The GCVS position is erroneous.
- V1658 The GCVS position is erroneous.
- V1663 The GCVS position is erroneous.
- V1687 TV Dor

- V1689 There are two components. We believe that the NE one varies. The positions of both stars have been derived from one plate of the reflector.
- V1709 According to Hodge and Wright, 1967 the star is double and the N component is probably the variable. Really it looks more complex than double. There are at least four very close, not separated components. In the catalogue, the coordinates of the N component are given.
- V1743 The GCVS position is erroneous.
- V1824 The GCVS position is erroneous.
- V1883 The GCVS position is erroneous.
- V1892 The GCVS position is erroneous.
- V1918 OGLE LMC_SC8 337546.
- V1926 The GCVS position is erroneous.
- V1932 The GCVS position is erroneous.
- V1947 There is a very close component to E, which excludes accurate position determination. The catalogue position has been derived from one plate of the 1 m reflector.
- V1958 TW Dor
- V1962 The GCVS position is erroneous.
- V2080 There are two components. We cannot indicate which component varies. Their positions have been derived from one plate of the reflector.

- V2087 There are two components, but we cannot indicate which of them varies. The position of the SW component has been derived from one plate of the 1 m reflector.
- V2204 The GCVS position is erroneous.
- V2219 The GCVS position is erroneous.
- V2254 Has a complex image. There are at least three very close, not separated components. The declination is not very accurate.
- V2277 There are two close components, N and S. We believe that S varies. The position of the S component has been derived from one plate of the reflector. The position of the N component is not very accurate.
- V2283 OGLE LMC_SC6 377026.
- V2291 OGLE LMC_SC6 369970.
- V2295 OGLE LMC_SC6 369993.
- V2390 The GCVS position is erroneous.
- V2417 TY Dor n
- V2418 The GCVS position is erroneous.
- V2419 TX Dor
- V2491 The star has a complex image and was measured with difficulties. Its position has been derived from one plate of the reflector.

Список литературы

- [1] Alcock, C., Allsman, R.A., Alves, D. et al., //Astron. Journ., 1997, **114**, 326
- [2] Butler, C.J. and Wayman, P.A. //Dunsink Publ., 1974, **1**, No 7
- [3] General Catalogue of Variable Stars, Vol. V: Extragalactic Variable Stars, Moscow: “Kosmosinform”, 1995
- [4] Grison, J.-P., Beaulieu, J.-P., Pritchard, J.D. //Astron. Astrophys. Suppl. Ser., 1995, **109**, N 3, 447
- [5] Hodge, P.W. and Wright, F.W., The Large Magellanic Cloud, 1967, Smithsonian Press, Washington, D.C.
- [6] Høg, E., Kuzmin, A., Bastian, U. et al. //Astron. Astrophys., 1998, **335**, L65-L68
- [7] Hughes, S.M.G. //Astron. Journ., 1989, **97**, 1634
- [8] Kurochkin, N.E., Tokovinin, A.A., Loggins, A. //IBVS, 1989, N. 3365
- [9] Udalski, A., Szymanski, M., Kubiak, M. et al. //Acta Astronomica, 1998, **48**, 147
- [10] Udalski, A., Soszynski, I., Szymanski, M. et al. //Acta Astronomica, 1999, **49**, 223

Система внутреннего контроля для космического астрометрического эксперимента

А.Э.Наджип, С.Н.Корешев¹

Аннотация

Представлена общая концепция системы внутреннего метрологического контроля величины базового угла и величины эквивалентного фокусного расстояния астрометрической системы для космического эксперимента “Ломоносов”. Оптическая схема метрологической системы построена по близкой к автоколлимационной схеме с использованием импульсного монохроматического источника излучения, расположенного вблизи фокальной плоскости, и ретроотражателей в виде дифракционных элементов, нанесенных на поверхности плоских зеркал, образующих эталонный угол. Рассмотрены возможные технологические способы нанесения дифракционных ретроотражателей на поверхности плоских зеркал.

1 Введение

“ЛОМОНОСОВ” — проект космического астрометрического эксперимента, включенный в “Программу российских космических исследований до 2010 г”. Главными целями эксперимента являются: (1) создание высокоточной и стабильной на длительном интервале времени фундаментальной системы небесных координат и (2) получение высокоточных астрометрических данных, необходимых для решения широкого круга задач звездной астрономии и астрофизики. Успешно выполненный в течение 1989-1993 гг первый космический

¹Всесоюзный Научный Центр “Государственный оптический институт им. С.И. Вавилова”

астрометрический эксперимент HIPPARCOS [1] продемонстрировал огромный потенциал космической астрометрии. В отсутствии помех со стороны земной атмосферы и гравитационной нагрузки на инструмент были измерены положения, параллаксы и собственные движения более ста тысяч звезд с видимыми величинами $V < 12^m$ с беспрецедентно высокой точностью — около 1 миллисекунды (мс) дуги для положений и около 1 мс/год для собственных движений [2]. Однако результаты этой миссии, несмотря на их большое научное значение, все же ещё не адекватны современным проблемам звездной астрономии и астрофизики. Необходимо ещё на два-три (!) порядка величины улучшить точность измерений астрометрических параметров звезд и одновременно на 5–7(!) звездных величин продвинуться к более слабым объектам. Именно на решение этой чрезвычайно сложной задачи направлены все разрабатываемые в настоящее время новые космические астрометрические проекты.

В основу большинства разрабатываемых в настоящее время проектов положена методика так называемой “глобальной астрометрии” [3], апробированная в эксперименте HIPPARCOS и показавшая свою высокую эффективность. Глобальная астрометрия — это методика, сочетающая специально разработанный сценарий наблюдений и соответствующий этому сценарию метод обработки данных. Суть этой методики сводится к проведению последовательной относительной привязки программных звезд друг к другу посредством измерений угловых расстояний между ними до получения замкнутой опорной сетки, покрывающей всю небесную сферу. Затем полученная опорная координатная сетка описывается математически в терминах астрометрических и инструментальных параметров, и методом наименьших квадратов находятся самосогласованные решения для неизвестных величин: положений, собственных движений и абсолютных параллаксов программных звезд, а также для неизвестных инструментальных параметров. Использование такой методики позволяет за относительно короткий период времени охватить наблюдениями всю

небесную сферу и значительно (почти на порядок величины) повысить финальную астрометрическую точность наблюдений в сравнении с точностью одноразовых наблюдений.

Может показаться странным, что абсолютные величины параллаксов могут быть получены из относительных измерений. Однако, как это не кажется парадоксальным, это действительно возможно в случае, когда производится очень точная взаимная привязка звезд, находящихся на больших (порядка одного-двух радиан) угловых расстояниях друг от друга, и когда наблюдения одних и тех же звезд проводятся периодически на протяжении нескольких лет [3].

Основной проблемой глобальной астрометрии является необходимость исключения возможных региональных и систематических ошибок. Поскольку все данные измерений сводятся в единую систему уравнений и обрабатываются совместно, то каждая такая ошибка будет неминуемо сказываться на точности определения астрометрических параметров для всех программных звезд. Причиной возникновения таких ошибок могут быть как неудачно выбранный сценарий наблюдений, не обеспечивающий равномерного покрытия неба и необходимой избыточности данных, так и нестабильность инструментальных параметров астрометрической системы.

Наиболее критическими инструментальными параметрами астрометрической системы являются величина углового эталона, относительно которого проводятся измерения больших угловых расстояний между звездами, и величина фокального расстояния изображающей системы (последняя определяет масштаб изображения неба на астрометрическом приемнике изображения). Оба этих параметра могут изменяться под воздействием переменных температурных и силовых нагрузок на астрометрическую систему, возникающих при переориентации космического аппарата, или в силу релаксации остаточных напряжений в оптических и механических элементах системы. Поэтому необходимым элементом любой широкоугольной астрометрической системы является система внутреннего метрологического кон-

троля отклонений этих параметров от их номинальных значений. В последующих разделах этой статьи дано описание общей концепции построения системы лазерного метрологического контроля астрометрической системы “Ломоносов”. Эта концепция была предложена и разработана А.Э. Наджип [8] и более детально проработана в технологическом плане в ВНЦ “ГОИ им. С.И. Вавилова” [9].

2 Угловой эталон

Многие из разрабатываемых в настоящее время космических астрометрических проектов следуют классической оптической схеме HIPPARCOS. Эта схема состоит из одного телескопа и расположенной перед ним системы из двух плоских зеркал, расположенных под некоторым заданным углом друг к другу. Типичная конфигурация такой оптической системы схематически показана на рис.1. Плоские зеркала делят апертуру телескопа на две части, так что образуется оптическая система с двумя пространственно разнесенными локальными полями зрения в пространстве предметов и единым полем в пространстве изображений. Величина угла между плоскими зеркалами определяет номинальное угловое расстояние – базовый угол (угловой эталон) – между центрами локальных полей зрения. В результате создается возможность для дифференциальных измерений угловых расстояний между звездами (попадающими в разные поля зрения) относительно базового угла. Очевидно, что величина базового угла должна сохраняться постоянной на протяжении достаточно длительного интервала времени; временная стабильность базового угла должна быть адекватной точности измерений, чтобы действительно служить угловым эталоном. Поскольку в условиях открытого космического пространства это требование выполнить практически невозможно, то необходим непрерывный мониторинг отклонений базового угла от его номинальной величины.

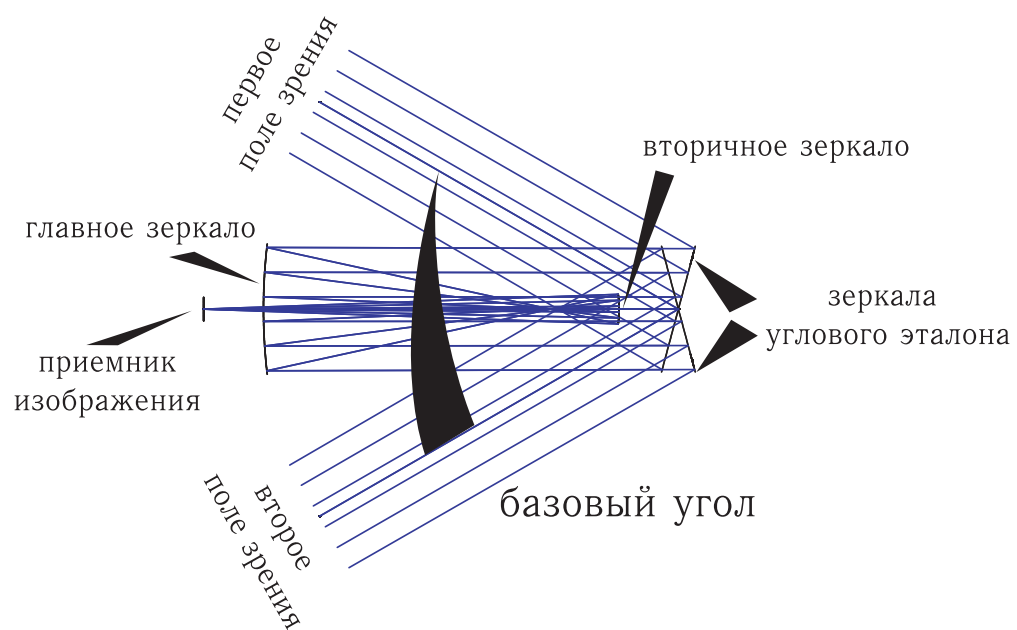


Рис. 1. Типичная конфигурация астрометрической системы типа HIPPARCOS.

Предложено много различных методов для высокоточного контроля угла между двумя плоскими зеркалами. Однако в действительности величина углового расстояния между двумя локальными полями зрения (угловой эталон) рассматриваемой оптической системы определяется не только углом между двумя плоскими апертурными зеркалами, но зависит также от взаимного расположения всех оптических элементов астрометрической системы, включая первичное и вторичное зеркала телескопа, приемник изображения и др. В частности, необходимо контролировать юстировку телескопа, поскольку ее нарушение приводит к неконтролируемым абберациям оптической системы и, как следствие, к смещению центроидов изображений звезд. Кроме того, нарушение юстировки телескопа приводит к изменениям величины эффективного фокусного расстояния оптической системы, определяющей масштаб изображения в фокальной плоскости. Короче говоря, система контроля углового эталона должна быть комплексной, то есть охватывать все оптические элементы астрометрической системы. В последующих разделах дано описание разработанной нами системы комплексного контроля углового эталона астрометрической системы “Ломоносов”.

3 Принцип действия системы метрологического контроля

По своему схемотехническому решению предложенная и разработанная нами система метрологического контроля астрометрической системы очень проста. Она строится по хорошо известной автоколлимационной схеме спектрографа Литрова. На рис.2 показана ее принципиальная схема. На поверхности каждого из двух плоских зеркал, образующих базовый угол астрометрической системы, наносятся ретроотражатели в виде плоских дифракционных решеток с прямолинейными штрихами. Вблизи фокальной плоскости (точнее, в опти-

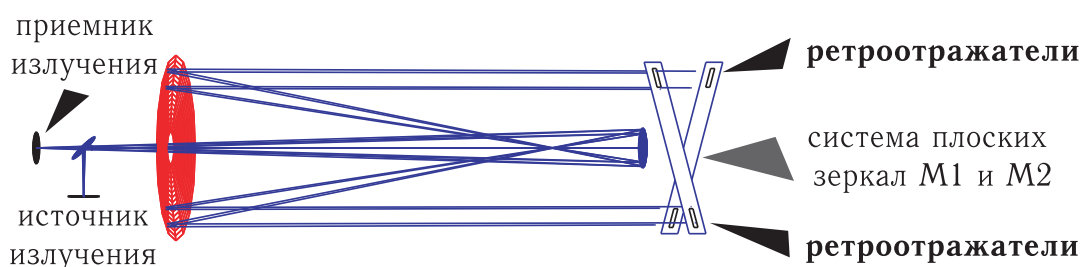


Рис. 2. Принципиальная схема метрологической системы.

чески сопряженной с ней плоскостью) располагается точечный импульсный источник монохроматического излучения. Излучение проходит через всю оптическую систему, отражается от дифракционных решеток в обратную сторону, вновь проходит через всю оптическую систему и фокусируется на астрометрическом приемнике изображения. На приемнике формируются два (по одному от каждого ретроотражателя) фокальных пятна, являющихся двумя изображениями точечного источника излучения. При полном покрытии плоских зеркал дифракционной структурой размеры и тонкая структура фокальных пятен примерно те же, что и для изображений наблюдаемых звезд. Длина волны излучения монохроматического источника и пространственный период дифракционных решеток рассчитываются таким образом, чтобы обеспечить равенство углов падения и отражения излучения на решетках. В таком случае угловое увеличение дифракционных решеток равно единице и они ведут себя по отношению к падающему и отраженному от них излучению точно таким же образом, как и зеркала, на которые они нанесены: угол отражения изменяется на величину 2α при изменении угла установки зеркала на угол α . Таким образом, измеряя смещение центроидов пятен рассеяния в фокальной плоскости, можно контролировать и точно измерять величину отклонения углового эталона от ее номинальной величины.

При больших габаритах астрометрической системы нанесение дифракционной структуры на всю поверхность апертурных зеркал представляет собой чрезвычайно сложную технологическую задачу и может быть оправдано лишь в случае необходимости контроля текущей формы поверхности зеркал. К тому же при нанесении дифракционной структуры на всю поверхность зеркал можно ожидать значительных потерь света от программных звезд. Вместе с тем при уменьшении апертур ретроотражателей увеличивается размер фокальных пятен и снижается точность измерений координат их центроидов. Поэтому в качестве компромиссного решения мы предложили использовать ретроотражатели, выполненные в виде двух пространственно разнесенных небольших субапертур, подобно тому, как располагаются входные зрачки в звездном интерферометре Майкельсона. При этом на каждом зеркале объединяющего устройства должно быть нанесено по две дифракционные субапертуры, расположенные вблизи их краев, как это показано на рис.2. В таком случае фокальные пятна будут иметь тонкую периодическую структуру, возникающую в результате суперпозиции двух пучков лучей, исходящих от двух субапертур. Очевидно, что период следования интерференционных полос будет определяться расстоянием между центрами двух субапертур. При использовании такой схемы контроля измеряемым параметром является фаза (величина смещения) интерференционных полос.

При реализации интерференционной схемы возникает несколько проблем, требующих отдельного рассмотрения. При автоколлимационном ходе лучей и больших углах падения излучения на решетки возможно нарушение принципа таутохронизма. Это нарушение выражается в наличии значительной разности оптических длин излучения, дифрагировавшего на разных субапертурах дифракционных ретроотражателей. Оно может явиться причиной некогерентного сложения дифрагировавших на субапертурах пучков лучей, приводящего к формированию в плоскости приемника пятна рассеяния

с размерами, определяемыми апертурой каждой из решеток, и не имеющего тонкой структуры. Если даже разность длин оптического пути не будет превышать длины когерентности источника излучения, то и в этом случае нарушение таутохронизма может привести к значительному уменьшению контраста интерференционных полос в пятне рассеяния. Одним из наиболее эффективных методов устранения последствий нарушения таутохронизма является введение в оптическую систему источника монохроматического излучения компенсатора разности длин оптического пути.

Входящий в систему контроля источник монохроматического излучения должен иметь стабильные спектральные характеристики. Необходимость поддержания постоянства спектральных характеристик излучения объясняется тем, что вариации длины волны излучения могут привести к взаимному смещению формируемых ретроотражателями фокальных пятен. Наличие такого смещения может быть ошибочно принято за следствие изменения величины эталонного угла. Пределы допустимых вариаций средней рабочей длины волны источника излучения и, конечно же, спектральной ширины излучения могут быть рассчитаны с помощью выражений, описывающих условие автоколлимации. Наиболее подходящими с этой точки зрения источниками излучения являются одночастотный He-Ne лазер и некоторые твердотельные лазеры. Следует отметить, что к источнику излучения не предъявляется требование строгой монохроматичности излучения, а необходимо лишь обеспечить стабильность его спектральных характеристик во времени.

Для получения в фокальной плоскости телескопической системы интерференции излучения, дифрагировавшего на ретроотражателях, требуется обеспечить длину когерентности излучения, превышающую разность оптической длины пути, возникающей в пределах каждой субапертуры ретроотражателя. Ограничения на минимальные вариации длины волны излучения и необходимость обеспечения значительной длины его когерентности требуют, на наш взгляд, ис-

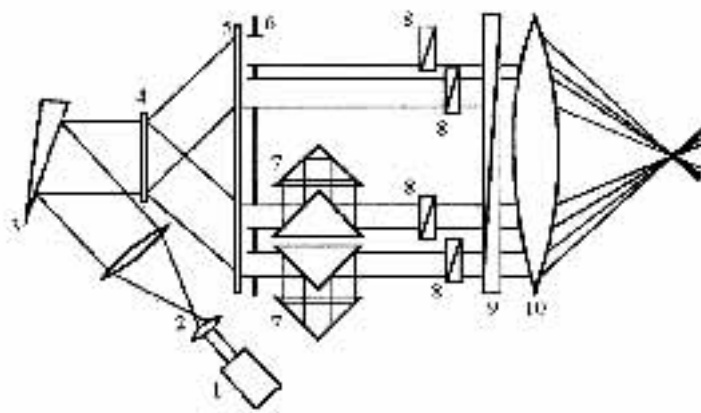


Рис. 3. Схема формирующего блока метрологической системы.

пользования лазерного источника излучения.

4 Схема формирующего блока системы метрологического контроля

Принципиальная схема формирующего блока системы контроля угла и дефокусировки представлена на рис.3. На этом рисунке цифрой 1 обозначен источник излучения. Сформированный им пучок света расширяется коллимирующей оптической системой 2 и направляется на клин 3, на грани которого нанесены частично отражающие покрытия. Коэффициенты отражения и пропускания покрытий выбираются такими, что обеспечивают примерно равное соотношение интенсивностей двух отраженных от поверхностей клина 3 пучков лучей. Отметим, что на рис.2 изображен ход лишь одного из этих двух пучков.

Отраженные от поверхностей клина параллельные пучки лучей направляются на пропускающую дифракционную решетку 4, дифра-

гируют на ней и формируют в ± 1 порядках дифракции решетки 5 четыре попарно параллельных пучка. Каждая пара этих пучков проходит через диафрагму 6, делящую по фронту каждый из пучков на два, через двухпризменные системы выравнивания разности хода 7, компенсирующие нарушение принципа таутохронизма в датчике, через системы оптических клиньев 8 и 9 и направляется на линзу 10, собирающую пучки в два фокальных пятна, располагающихся от светоделителя 2 (см, рис.3) на том же расстоянии, что и фотоприемная матрица 3. Системы оптических клиньев 8 и 9 предназначены для изменения направления распространения проходящих через них параллельных пучков лучей. Каждая из них состоит из двух клиньев, вращающихся независимо друг от друга вокруг оси, параллельной оптической оси линзы 10. Системы клиньев 8 служат для компенсации технологических ошибок нанесения дифракционных ретроотражателей на зеркала наблюдательной системы и ошибок сборки и юстировки оптической системы датчика угла и дефокусировки. Система клиньев 9 предназначена для обеспечения близкого к автоколлимационному режима работы датчика при тепловых и иных деформациях конструкции наблюдательной системы, например, при наклонах блока плоских зеркал, главного и вспомогательного зеркал наблюдательной системы, при угловом уходе диаграммы направленности источника излучения и т.д. Ближайшие к оптической оси линзы 10 пучки лучей направляются на дифракционные ретроотражатели, нанесенные на малое плоское зеркало объединяющего устройства, дифрагируют на них и в близком к автоколлимационному режиме возвращаются на полупрозрачное зеркало 2 (см. рис.3), проходят через него и падают на фотоприемную матрицу 3. Остальные пучки лучей падают на дифракционные структуры, нанесенные на большое плоское зеркало объединяющего устройства, дифрагируют на них, возвращаются в близком к автоколлимационному режиме на зеркало 2 (см. рис.3), проходят через него и падают на фотоприемную матрицу 3.

5 Структура фокальных пятен, формируемых системой контроля

Ход лучей, описанный в предыдущем подразделе, приводит в плоскости фотоприемной матрицы к суперпозиции 4 пар пучков, формирующих 4 разнесенных по плоскости фокальных пятна. Диаметр каждого из них – $d_{\text{ф}}$ определяется световым диаметром дифракционных ретроотражателей – d , который может быть рассчитан с помощью выражения:

$$d = \frac{2\lambda}{D_p} F_{\text{эф}}, \quad (1)$$

где: λ – рабочая длина волны датчика; $F_{\text{эф}}$ – фокусное расстояние наблюдательной системы; D_p – размер проекции субапертуры ретроотражателя на плоскость, перпендикулярную направлению распространения формируемого датчиком пучка лучей.

Энергия внутри каждого из этих фокальных пятен распределяется по косинусоидальному закону с периодом следования, определяемым расстояниями между центрами субапертур соответствующих ретроотражателей.

Необходимое для нормальной работы датчика взаимное расположение фокальных пятен в плоскости фотоприемной матрицы, определяемое выбранным алгоритмом определения координат центроидов пятен, может быть легко реализовано путем соответствующих юстировок систем клиньев формирующего блока датчика угла и дефокусировки. Одна из возможных конфигураций расположения фокальных пятен представлена на рис.4.

Здесь цифрами 1 и 2 обозначены фокальные пятна, сформированные с помощью ретроотражателей, нанесенных на плоское зеркало M_1 (см. рис.2); цифрами 3 и 4 обозначены пятна, сформированные ретроотражателями, нанесенными на плоское зеркало M_2 . Мерой фокусировки наблюдательной системы в этом случае служит

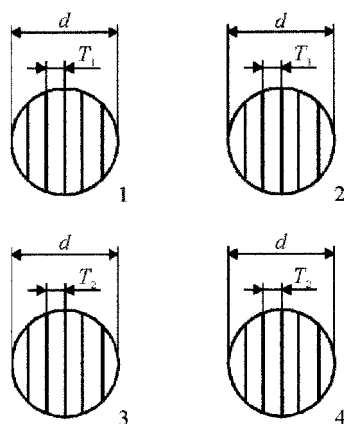


Рис. 4. Расположение фокальных пятен в плоскости фотоприемной матрицы

расстояние между центрами пятен 1 и 2, 3 и 4.

Возможный в процессе эксплуатации наблюдательной системы взаимный разворот зеркал объединяющего устройства приведет к соответствующему смещению максимумов распределения яркости внутри фокальных пятен 1 и 2, либо 3 и 4.

Для реализации некоторых алгоритмов измерения взаимного разворота зеркал может оказаться полезным некогерентное сложение распределений интенсивности в фокальных пятнах 1 и 3, 2 и 4. Такое сложение может быть осуществлено как электронным путем, так и чисто оптически за счет соответствующей юстировки систем оптических клиньев формирующего блока датчика. Отметим, что эта операция потребует также и дополнительных мер, связанных с необходимостью нарушения взаимной когерентности излучения, формирующего соответствующие фокальные пятна. Одним из вариантов решения этой проблемы является применение в формирующем блоке датчика двух независимых источников излучения.

При некогерентном сложении фокальных пятен 1 и 3, 2 и 4 рас-

пределение интенсивности $I(x)$ в их центральном ядре может быть описано с помощью следующего выражения:

$$I(x) = 2 \cos \left(\frac{4\pi}{T_1 + T_2} x + \frac{\varphi_0}{2} \right) \cos \left(2\pi x - \frac{\varphi_0}{2} \right), \quad (2)$$

$$\varphi_0 \approx \frac{\operatorname{tg} \xi (D_{1c} \cos \beta + D_{2c} \cos \gamma)}{2\lambda},$$

где ξ — угол взаимного разворота плоских зеркал. Из приведенных выражений следует, что некогерентное сложение фокальных пятен 1 и 3, 2 и 4 эквивалентно, по своему действию, некоторой аподизации распределения интенсивности в формируемой внутри них интерференционной картине.

Проведенный нами расчет показывает, что даже при значительных, достигающих до 1 м фокусных расстояниях линзы 10 формирующего блока в нем реализуется близкое расположение параллельных пучков лучей, что существенно затрудняет установку в них независимых призмённых компенсаторов разности хода и систем оптических клиньев. Один из возможных путей устранения этой проблемы состоит в использовании в составе формирующего блока двух дополнительных коллиматоров с увеличением 3-5 крат, устанавливаемых после решеток 6 и на выходе формирующего блока, непосредственно перед линзой 10.

6 О требованиях, предъявляемых к источнику излучения

Входящий в состав формирующего блока источник излучения должен удовлетворять как общим требованиям, предъявляемым к астрометрической системе в целом, так и ряду специфических требований,

обусловленных принципом действия и конструкцией оптической системы. К числу последних можно отнести требования к уровню излучаемой световой энергии, а также требования к стабильности спектральных характеристик излучателя и к длине когерентности излучения. Энергетические характеристики мы здесь рассматривать не будем, поскольку требования к ним во многом определяются используемым в датчике способом считывания и обработки информации. Необходимость поддержания постоянства спектральных характеристик излучения объясняется тем, что вариации рабочей длины волны источника излучения могут обусловить взаимное смещение формируемых ретроотражателями фокальных пятен. Наличие такого смещения снижает обусловленность датчика, поскольку может быть ошибочно принято за следствие разворота большого или малого плоских зеркал. Пределы допустимых вариаций средней рабочей длины волны источника излучения и, конечно же, спектральной ширины излучения могут быть рассчитаны с помощью выражений, описывающих условие автоколлимации. Из этих выражений следует, что величина допустимых вариаций рабочей длины волны датчика — $\Delta\lambda$ должна удовлетворять соотношению:

$$\Delta\lambda \leq \frac{2\Delta\alpha_c \cos \gamma \cos \beta}{\nu_2 \cos \beta - \nu_1 \cos \gamma}, \quad (3)$$

где $\Delta\alpha_c$ — допустимое относительное угловое смещение фокальных пятен из-за вариаций рабочей длины волны датчика. Если положить $\Delta\alpha_c$ равным $0,001''$, то при выбранных значениях параметров датчика допустимые вариации длины волны излучения не должны превышать $\pm 1,5 \cdot 10^{-9}$ мкм. Такому требованию, в принципе, удовлетворяет излучение одночастотных He-Ne лазеров и ряда твердотельных лазеров. Здесь необходимо отметить, что принцип действия рассматриваемого датчика не требует строгой монохроматичности излучения, а требует лишь обеспечения стабильности его спектральных характеристик во времени.

Требования, предъявляемые к когерентности используемого излучения, обусловлены реализуемыми в рассматриваемом датчике угла и дефокусировки значительными нарушениями принципа таутохронизма. Необходимость обеспечения в фокальной плоскости наблюдательной системы интерференции излучения, дифрагировавшего на ретроотражателях, обуславливает необходимость выбора источника излучения, обеспечивающего длину когерентности, превышающую разность оптической длины пути, реализуемую в пределах каждой субапертуры ретроотражателя.

Требования к минимальным вариациям длины волны излучения и необходимость обеспечения значительной длины его когерентности свидетельствуют, на наш взгляд, в пользу выбора лазерного источника излучения для рассматриваемого датчика угла и дефокусировки.

Имеется, однако, много других важных требований к источнику излучения, на которых мы не можем здесь останавливаться из-за ограниченного объема данной статьи.

7 Об эффекте “искривления спектральных линий” и о его влиянии на датчик с дифракционными отражателями

Известный из теории спектральных приборов эффект искривления спектральных линий, обусловленный зависимостью величины проекции угла дифракции излучения на плоскость дифракции решеток — α_c от величины угла θ , который составляют лучи падающего и дифрагировавшего пучков с их проекциями на плоскость дифракции решетки, может также оказать существенное влияние на обусловленность работы датчика угла и дефокусировки. Для рассмотрения этого положения запишем условие автоколлимации в виде, учитыва-

ющем падение на решетку пучка вне ее плоскости дифракции:

$$\sin \alpha_c = \frac{\lambda \nu}{2 \cos \theta}, \quad (4)$$

где: α_c – угол, образованный падающим и дифрагировавшим на решетке пучками с их проекциями на плоскость дифракции решетки, т.е. на плоскость, перпендикулярную ее штрихам; θ – угол, образованный падающим и дифрагировавшим пучками с их проекциями на плоскость дифракции решетки. Из (4) следует, что наклон плоских зеркал объединяющего устройства наблюдательной системы вокруг осей, параллельных плоскостям дифракции ретроотражателей, приведет, также как и вариации длины волны излучения, к смещению фокальных пятен, формируемых датчиком в фокальной плоскости астрометрической системы. Взаимное угловое смещение фокальных пятен может быть воспринято датчиком как следствие реально отсутствующего взаимного разворота зеркал вокруг осей, перпендикулярных плоскости дифракции ретроотражателей.

8 Возможные технологические способы нанесения ретроотражателей на поверхности плоских зеркал

Нанесение дифракционных структур на поверхность крупногабаритных зеркал представляет собой чрезвычайно сложную технологическую задачу. Работы по ее решению в настоящее время проводятся как в России, так и за рубежом. Принцип действия рассматриваемой метрологической системы несколько упрощает задачу, поскольку требует нанесения на плоские зеркала объединяющего устройства наблюдательной системы двух пар относительно небольших по площади эквидистантных прямолинейных дифракционных структур с относительно небольшими пространственными частотами; причем без

необходимости взаимной фазировки, как внутри каждой пары, так и вне ее. Последнее замечание позволяет принять, в качестве основного, метод последовательного независимого нанесения дифракционных структур на поверхности зеркал. Отметим, что неизбежные при этом методе ошибки в ориентации штрихов структур будут скомпенсированы путем соответствующей юстировки систем оптических клиньев формирующего блока метрологической системы.

Дифракционные структуры на поверхностях зеркал могут выполняться как в виде поверхностного рельефа, непосредственно выгравированного или вытравленного на зеркалах, так и в виде наносимых на их поверхность пропускающих полимерных решеток. По своим отображающим свойствам оба варианта исполнения решеток совершенно эквивалентны и отличаются лишь своими энергетическими характеристиками.

С точки зрения технологичности, на наш взгляд, более перспективным является второй вариант, основанный на использовании прозрачных полимерных решеток. Практически он может быть реализован с помощью известной и широко используемой методики получения реплик дифракционных решеток. При этом в качестве оригиналов могут быть использованы рельефные дифракционные решетки, полученные методом голографии. Перспективность применения голографических оригиналов оправдывается, в первую очередь, гибкостью варьирования их пространственной частоты и относительно низкой стоимостью.

В качестве недостатков такого варианта исполнения ретроотражателей нельзя не отметить более низкую, по сравнению со случаем непосредственного нанесения рельефа на поверхность зеркал, реализуемую дифракционную эффективность в первом порядке дифракции при большей требуемой глубине рельефа дифракционных структур. Вместе с тем отсутствующая в этом варианте исполнения необходимость в нанесении регистрирующей среды на поверхность зеркал, ее экспонировании, химико-фотографической обработке и ион-

ном травлении материала зеркал обуславливает несомненную предпочтительность и перспективность такого варианта исполнения ретроотражателей.

9 Заключение

Построение метрологической системы по близкой к автоколлимационной схеме с использованием внутреннего лазерного источника излучения и ретроотражателей, выполненных в виде дифракционных оптических элементов, является, на наш взгляд, одним из перспективных путей создания такой системы. В таком исполнении система метрологического контроля по своим схемотехническим решениям весьма близка к описанным в литературе датчикам волнового фронта, работающим по голограммным структурам, наносимым на главное зеркало адаптивного космического телескопа [4, 5, 6, 7].

Разработанная нами система метрологического контроля величины базового угла и величины эффективного фокусного расстояния астрометрической системы “Ломоносов” замечательна во многих отношениях. Во-первых, контролируется вся оптическая система — все входящие в нее оптические элементы, влияющие на изменение величины углового эталона, включая aberrации оптической системы. Во-вторых, точность измерений не зависит от возможных небольших изменений в положении источника излучения или приемника изображения. В-третьих, точность контроля значительно выше (как и требуется от системы контроля эталонного угла), чем точность измерений положений программных звезд, поскольку величина отношения сигнала к шуму может быть сделана достаточно большой. В-четвертых, система контроля позволяет осуществлять непрерывный мониторинг величины углового эталона и величины эффективного фокусного расстояния телескопической системы. Наконец, для определения координат центроидов фокальных пятен и измерений

расстояний между ними используется тот же алгоритм, что и для программных звезд.

Список литературы

- [1] Perryman M.A.C. et al. //A&A, 1992, **258**, p.1.
- [2] Perryman, M.A.C. et al., The Hipparcos Catalogue //A&A, 1997, **323**, p.L49-L52.
- [3] Lindegren L. //A&A, 1980, **89**, p.41-47.
- [4] Харди Дж. //ТИИЭР, 1978, т.**66**, вып.6, 31-85.
- [5] Зуев В.С. и др. //Квантовая электроника, 1975, т.**2**, № 1, 92-98.
- [6] Анищенко В.В. и др. //Оптика атмосферы и океана, 1993, т.**6**, № 12, 38-46.
- [7] Корешев С.Н. //Оптический журнал, 1995, № 10, 46-54.
- [8] А.Э. Наджип, Отчет, ГАИШ, 1997; не опубликовано
- [9] С.Н. Корешев, Отчет, ГАИШ, 1998; не опубликовано

Григорий Петрович Пильник



12 сентября 2000 г. на 84 году жизни скоропостижно скончался старейший астроном Московского университета Григорий Петрович Пильник.

Григорий Петрович родился 5 ноября 1916 г. в селе Владимировка Черниговской губернии в семье крестьян. Как он сам пишет “В 1929 году в порядке планового переселения вся семья переехала на Дальний Восток и поселилась в г.Спасске”. В 1934 г. Г.П.Пильник поступает на первый курс Дальневосточного университета, который успешно заканчивает в 1939 году.

В феврале 1940 г. Григорий Петрович призывается в Советскую Армию. В составе 1 Белорусского фронта он участвует в освобождении Варшавы, Познани, в боях на реке Одер, в штурме Берлина. За отличия в боях Григорий Петрович награжден двумя орденами и тремя медалями.

После демобилизации в 1946 г. он поступает на работу в “Службу Времени ГАИШ” и принимает активное участие в обустройстве нового здания института на Ленинских горах. Не оставляет он и занятий астрометрией. Его первые результаты были собраны в кандидатскую диссертацию “Ошибки определения времени пассажным инструментом, зависящие от порядка наблюдений” защита которой состоялась 29 марта 1954 г. Научным руководителем этой работы был чл.-корр. АН СССР С.Н.Блажко.

Как астроном, Григорий Петрович удачно сочетал в себе качества теоретика и практика. Ежегодно астрономические наблюдения занимали у него от 60 до 100 и более вечеров. Большая часть его работ основана на собственных наблюдениях. Ему удалось получить весьма интересные результаты. Так, оригинальным методом он определил долготу обсерватории на Ленинских горах и показал, что все меридианные инструменты, установленные на одной обсерватории имеют сходные сезонные ошибки.

Далее научные интересы Григория Петровича расширяются и включают в себя вопросы неравномерности вращения Земли, приливы, нутацию и движения материков. Очень интересные результаты по обработке 25-летнего ряда наблюдений были обобщены в его докторской диссертации “Всемирное время и проблемы физики Земли”, защищенной в 1979 году. В последние годы его очень интересовал вопрос о влиянии движений жидкого ядра Земли на вращение ее твердой оболочки.

Жизнь института была и его жизнью. Он являлся членом Совета ветеранов войны физического факультета, руководил курсовыми и дипломными работами, проводил практику студентов Астрономического отделения. В человеческом общении его отличала доброта и благожелательность.

История его жизни навсегда войдет в историю нашего института.

По поручению астрономов МГУ профессор И.А.Герасимов.

Вилен Валентинович Нестеров



16 апреля 2000 г. не стало Вилена Валентиновича Нестерова – доброго, обаятельного человека, выдающегося ученого, яркого представителя талантливой плеяды астрометристов, заведующего отделом астрометрии Государственного астрономического института им. П.К.Штернберга, доктора физико-математических наук, профессора, лауреата Ломоносовской премии МГУ.

Вилен Валентинович отдал всю свою жизнь бескорыстному служению своей любимой науке – астрономии. Это был ученый широкого диапазона знаний, глубокого понимания астрометрических и общеоастрономических проблем. Он обладал превосходным даром предвидения приоритетных тенденций в развитии астрономической науки, выбирал наиболее трудные и актуальные задачи.

После окончания в 1957 г. астрономического отделения МГУ Вилен Валентинович был принят на работу в ГАИШ, с которым он не расставался до последних дней своей жизни, пройдя путь от старшего лаборанта до заведующего отделом астрометрии. В 1963 г. он защитил кандидатскую, а в 1984 г. докторскую диссертацию. В период 1965–1982 гг., будучи ассистентом, а затем доцентом кафедры звездной астрономии и астрометрии МГУ, Вилен Валентинович руководил курсовыми, дипломными и диссертационными работами, вел практические занятия, читал лекции по общим и специальным курсам. Им были подготовлены и прочитаны курсы лекций “Вращение Земли”, “Космическая геодинамика”, “Стандарт основных вычислений астрономии”. Особенно велики достижения Вилена Валентиновича в области фундаментальной астрометрии. Его работы по созданию нового астрометрического каталога положений и собственных движений 4 млн. звезд уже заслужили признание во всем мире. С именем В.В. Нестерова неразрывно связан крупнейший национальный космический проект создания высокоточной координатной системы всего неба – проект “Ломоносов”, душой и главной действующей силой которого он являлся.

Исследования в области применения результатов лазерных наблюдений ИСЗ для определения параметров вращения Земли и космической геодезии, ставшие основой оригинальной докторской диссертации Вилена Валентиновича Нестерова, служат эталоном научной строгости и глубины решения актуальных задач астрометрии.

Его учебник по общей астрометрии и многие работы стали настольными книгами астрономов в России и за рубежом. Вилен Валентинович воспитал целую плеяду учеников, среди которых более десятка докторов и кандидатов наук. Он был талантливейшим педагогом и популяризатором науки, мог легко и увлекательно рассказать о самых сложных проблемах.

Во всех печатных трудах Вилена Валентиновича проявился его редкий, особенно в научной среде, литературный дар. Каждая ста-

тья отличалась необыкновенной четкостью в постановке задачи и логическом ее решении, а также предельной ясностью и лаконичностью изложения, не чуждого тонкого юмора. Это качество позволило Вилену Валентиновичу сделать превосходный перевод с английского двух монографий: “Вращение Земли” У.Манка и Г.Макдональда (Из-во Мир, М. 1964 г.) и “Векторная астрометрия” Э.Маррея (Из-во Наукова Думка АН УССР, 1986 г.). Выход в свет этих книг не только знакомил с изданиями, малодоступными широкой научной общественности нашей страны, но даже счастливым обладателям английских оригиналов существенно помог в трактовке ряда нетривиальных воззрений авторов.

Вилен Валентинович был исключительно одаренным, обладающим потрясающим чувством юмора, неординарным человеком, прекрасным и высокоэрудированным шахматистом, многократным победителем международных турниров по спортивному бриджу, изумительным музыкантом, великолепным собеседником. Его суждения часто бывали необычными, но весьма оригинальными и глубокими. Он был необыкновенно скромным, максимально независимым человеком, которому была чужда околону научная суета.

Как глубоко порядочный человек, верный дружбе Вилен Валентинович искренне способен был разделить все тяготы и горе своих друзей и коллег. Его многогранная личность и человеческое обаяние останутся с нами навсегда.

Астрономы Московского Университета.

Список основных трудов В.В.Нестерова

1. Об определении цены оборота винта окулярного микрометра зенит-телескопа ЗТЛ-180. //АЦ, № 1936, 1958, 2с (совм. с Ю.И.Проданом).
2. Observations de paires d'échelle à la lunette zénithale. /Сообщ.на X Съезде МАС, Москва, 1958, 1 с (совм.с Ю.И.Проданом).
3. О некоторой особенности обработки широтных наблюдений, выполненных по расширенной программе. //АЦ, № 200, 1959, 2с.
4. Результаты предварительных исследований зенит-телескопа ГАИШ. /Тр.XIV Всес. Астром.Конф., Л-д, 1960, 8с (совм. с Т.И.Голиковой и Ю.И.Проданом).
5. Предварительные результаты обработки наблюдений на Московском зенит-телескопе за 1958 г. /Сборник МГГ, № 1, Москва, изд. АН СССР, 1960, 8с (совм.с О.М.Жуковой, Т.И.Голиковой и Ю.И.Проданом).
6. Новая оценка метода В.Струве определения широты из наблюдений с пассажным инструментом в первом вертикале. //АЖ, № 2, 1963, 7с.

7. Определение широты и азимута по наблюдениям прохождений звезд через первый вертикал способом, отличным от способа Струве. //Тр. Всес. Астром. Конф., 1963, 6с.
8. Об определении поправок к коэффициентам полугодового члена разложения нутации. //Сообщ. ГАИШ, № 134, 1964, 3с.
9. Об одном возможном критерии оценки качества широтных наблюдений. //Сообщ. ГАИШ, № 134, 1964, 3с.
10. Об определении склонений звезд из наблюдений с зенит-телескопом ЗТЛ-180. //Сообщ. ГАИШ, № 140-141, 1965, 3с (совм. с И.М.Калининой).
11. Астрометрия. //АЖ, № 5, 1965, 10с (совм. с В.В.Подобедом).
12. Определение постоянных установки зенит-телескопа из наблюдений в первом вертикале. //Сообщ. ГАИШ, № 146, 1966, 4с.
13. Проблема инерциальной системы координат в астрономии. //Вестник МГУ, № 5, 1967, 5с (совм. с В.В.Подобедом).
14. История астрометрических исследований в МГУ. //История и метод. ест. наук, в. VII, МГУ, 1968, 15с.
15. Колебания широты Москвы по наблюдениям на зенит-телескопе ЗТЛ-180 в предварительной системе склонений. //Сообщ. ГАИШ, № 170, 1971, 5с.
16. Функции распределения средних за ночь широт. //Сообщ. ГАИШ, № 170, 1971, 5с.
17. О модели Мельхиора чандлеровского колебания полюса. //АЖ, т. 47, № 2, 1970, 4с (совм. с Л.В.Рыхловой).
18. Общая обработка широтных наблюдений методом наименьших квадратов. //Сообщ. ГАИШ, № 178, 1972, 15с.

19. Модель ряда широтных наблюдений. //Сообщ. ГАИШ, № 179, 1972, 5с.
20. О систематических ошибках цепного метода обработки наблюдений. //Сообщ. ГАИШ, № 179, 1972, 7с.
21. Наблюдения широты Московской обсерватории, выполненные в 1958-1963 гг. /Труды ГАИШ, т.**44**, 1973, 38с (совм. с Ю.И.Проданом).
22. Общая астрометрия, учебное пособие. Москва, Наука, 1975, 551с (совм. с В.В.Подобедом).
23. Изучение глобальных характеристик Земли в свете новых направлений астрометрии. /Сборник ВАГО “Астрометрия и небесная механика”, 1978, 13с (совм. с В.В.Подобедом).
24. Общая астрометрия, учебник, 2-е издание. Москва, Наука, 1982, 576с. (совм. с В.В.Подобедом).
25. Вычисление возмущений движения искусственных спутников в гравитационном поле Земли. /Труды ГАИШ, т.**53**, 1983, 12с (совм. с Г.В.Романовой).
26. Вычисление обусловленных Луной возмущений элементов орбит искусственных спутников Земли. /Труды ГАИШ, т.**53**, 1983, 16с.
27. Определение параметров вращения Земли по данным лазерной локации ИСЗ ЛАГЕОС во время первой кампании MERIT. /Итоги науки и техники, серия Астрономия, т.**23**, 1983, Москва, ВИНТИ, 32с.
28. Two program complexes for analysing the satellite ranging data. /Сообщ. 2-го рабочего совещания MERIT, Херстмонсо, 1983, 6с (совм. с Я.С.Яцкивом и др.).

29. Предварительная обработка данных лазерной дальнометрии ИСЗ ЛАГЕОС, полученных во время короткого сеанса наблюдений по программе MERIT. //ПАЖ, т.10, № 5, 1984, 7с.
30. Параметры вращения Земли по лазерной дальнометрии ИСЗ ЛАГЕОС во время короткой кампании MERIT. //ПАЖ, т.10, № 6, 1984, 4с.
31. Сравнение параметров вращения Земли, полученных различными методами во время международного эксперимента MERIT. //ПАЖ, т.12, № 3, 1986, 3с (совм. с В.Д.Крайчевым).
32. Об одной возможности использования доплеровских наблюдений ИСЗ. /Планетарные геофизические исследования, Потсдам, 1986, 10с (совм. с В.Д.Крайчевым).
33. Анализ параметров вращения Земли, полученных во время эксперимента MERIT. //Научные информации Астросовета АН СССР, № 62, 1986, 11с (совм. с В.Д.Крайчевым и Л.В.Рыхловой).
34. Спецотчет. Москва, ГАИШ, 1986, 42с (совм. с А.М.Черепашуком и др.).
35. Спецотчет. Москва, ГАИШ, 1987, 97с (совм. с А.М.Черепашуком и др.).
36. Results of positional observations of Martian Satellites at the Mount Maidanak Observatory in 1988. //Astr. and Astroph.Sup.ser., may 1990, 4 p., совм. с О.И.Бугаенко и др.
37. An Astrometric catalog of four million stars /IAU Symp. 141, 1990, 1 p., совм. с В.С.Кислюком и Х.И.Поттером.
38. The LOMONOSOV Project for space astrometry /IAU Symp. 141, 1990, 5 p., совм. с А.М.Черепашуком и др.

39. PPM South. A reference star catalogue for the southern hemisphere: preliminary version. //Astr. and Astroph. Sup. ser., jan. 1991, 4 p., совм. с У.Бастианом и др.
40. Концепция и вопросы технической реализации космического астрометрического проекта ЛОМОНОСОВ /сб. статей “Космический астрометрический эксперимент”, изд-во МГУ, 1992, 21 с., совм. с А.В.Германовым и др.
41. Определение эталона угла из астрометрических наблюдений с борта КА, сб.статей, изд-во МГУ /сб. статей “Космический астрометрический эксперимент”, изд-во МГУ, 1992, 4 с., совм. с А.А.Волчковым.
42. Возможности обнаружения планет у ближайших звезд, сб. статей, изд-во МГУ /сб. статей “Космический астрометрический эксперимент”, изд-во МГУ, 1992, 4 с., совм. с М.В.Сажиным.
43. Determination of the proper motions of AC stars: first results. //Astr. Nachr. **314**, 1 p.,1993, совм. с А.А.Волчковым и А.В.Кузьминым.
44. PPM Star Catalogue, vols III and IV, positions and proper motions of 197179 stars south of -2.5 degrees declination. ARI Heidelberg, Spectrum Verlag, 1993, совм. с У.Бастианом и др.
45. Large Photographic Catalogues /IAU Symp. 166, 4 p., 1995, совм. с З.Резером.
46. The Henry Draper Extension Charts: A catalogue of accurate positions, proper motions, magnitudes and spectral types of 86933 stars //Astron. and Astroph. Sup. ser., vol. **110**, apr 1995, 4 p., совм. с А.В.Кузьминым и др.

47. Completion of the Sternberg Astronomical Institute Astrographic Catalogue project. //Baltic Astronomy, v.**6**, № 2, 1997. 6 p., совм. К.В.Куимовым и др.
48. Редукция Астрографического каталога в систему ICRS/HIPPARCOS. //Известия РАН. Серия физическая, т.**62**, № 9, 1998, совм. с К.В.Куимовым и др.
49. Completion of the Sternberg Astronomical Institute Astrographic Catalogue project. //IAU Symposium 179, "New Horizons from Multi-Wavelength Sky Surveys", August 26-31, 1996, Baltimore, USA. /McLean B., Golombek D., Hayes J., Payne H. (Eds.). Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. P. 409., совм. с А.П.Гуляевым и др.
50. Редукция Астрографического каталога в систему ICRS/HIPPARCOS. //Труды IV съезда Астрономического общества, 1998, М.: Современный писатель. 7с. совм. с К.В.Куимовым и др.

Издание подготовлено к печати
сотрудниками ГАИШ Л.П.Грибко,
М.В.Молодяну и В.Н.Семенцовым.

Научное издание “Труды ГАИШ”, т.68.

Подписано к печати 11.09.2000.

Формат 60x84/16. Бумага офс. №1.

Гарнитура Computer Modern

Усл.печ.л. 9,8. Тираж 150 экз.

заказ № 199

Физический факультет МГУ, ЛР.021293 от 18.06.1998

г. Москва, 119899, Ленинские горы, МГУ им. М.В.Ломоносова

Отпечатано в отделе оперативной печати

физического факультета МГУ